Una classe normal

El professor Circumferència va entrar a la classe $\sqrt[20]{1}$. Era el professor de matemàtiques del curs de les arrels enèsimes d'1, i aquell dia havia de parlar de les potències, les arrels... Per fi, els alumnes podrien entendre qui eren! Ésser sense saber qui eren els devia causar una buidor tan insana...

Els grups escolars estaven compostos per un conjunt d'elements, també anomenats alumnes, associats a una operació, com qualsevol grup. Aquesta operació complia, aplicada al conjunt d'alumnes en qüestió, la propietat associativa i, d'entre els elements del grup, un s'anomenava neutre. En efectuar l'operació amb qualsevol element del grup i l'alumne neutre, el resultat era aquest element qualsevol. D'altra banda, cada alumne tenia el seu invers, de tal manera que en fer l'operació amb aquests dos elements, s'obtenia el neutre. Després que dos alumnes del grup es relacionessin amb la seva operació, sempre se n'obtenia un altre del mateix grup. No hi havia res d'estrany.

El professor Circumferència va desitjar-los a tots molt bon dia, els va recordar breument el que havien treballat durant l'última setmana (els nombres primers, divisibilitat, la descomposició factorial d'un nombre natural...), i va començar la lliçó. Els va explicar que les potències tenien base i tenien exponent i que, igual com $7\cdot 3$ significa $3+3+...+3+3$, on apareix set vegades el nombre tres, 3^7 significa $3\cdot 3\cdot ...\cdot 3\cdot 3$, on el nombre tres apareix també set vegades. Ara bé, hi havia una diferència bastant gran: així com $7\cdot 3=3\cdot 7$, és a dir, el producte, compleix la propietat commutativa, les potències no compleixen la propietat commutativa i $3^7\neq 7^3$ (ja que, conclogué, un nombre la descomposició factorial del qual només conté tresos no pot ser igual a un altre la descomposició factorial del qual només conté sets).

El que sí que era commutatiu era el grup d'alumnes $\sqrt[20]{1}$ on el professor Circumferència maldava per tal que els alumnes entenguessin què volia dir 3^7. L'operació associada a aquest grup format per 20 elements era la multiplicació, que, com tots els alumnes ja sabien, era commutativa. I, de fet, potser aquest grup, a més d'un grup, era un subgrup del curs d'arrels enèsimes d'1, i per tant l'operació multiplicació (commutativa) devia ser una operació induïda pel curs (o grup) de les arrels enèsimes d'1. El fet que se'n derivava, que l'element neutre fos alhora en totes les infinites classes del curs, no us ha d'estranyar si teniu en compte que aquests alumnes no eren corporis sinó, o bé universals que els matemàtics *particularitzen* d'algun llenguatge humà (com diria el filòsof Bertrand Russell), o bé elements, diguem-ne derivats, d'aquests universals humans *particularitzats* (pertànyer o no pertànyer al lèxic comú d'una llengua, aquesta era la qüestió).

Quan el professor Circumferència va haver explicat què era una potència i què significava la base, i què significava l'exponent, va dedicar-se a raonar què passava amb les operacions entre diferents potències. Tenia una manera curiosa d'explicar-ho, que consistia en establir paral·lelismes amb propietats d'operacions ja conegudes pels seus alumnes. D'aquesta manera, a l'hora d'explicar que $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$ i que $\frac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$, feia notar les similituds amb el fet que $b\cdot a+c\cdot a=(b+c)\cdot a$ (i si tenim en compte que *c* pot ser negativa, digué, està clara la semblança amb la segona d'aquestes propietats). El que potser pot resultar més curiós és la relació que mostrava a continuació: de la mateixa manera que $a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$, $b^a\cdot c^a=(b\cdot c)^a$. I acabà l'explicació recordant als estimats alumnes que entenia $a\cdot b$ com *a vegades b* i no *b vegades a* i que, encara que en el producte això no tenia cap efecte, en fer un paral·lelisme amb el món de les potències esdevenia un detall important, ja que aquestes no eren pas commutatives (i en canvi, el producte sí).

En aquesta classe d'arrels vintenes d'u hi havia, com en tots els grups escolars, alumnes amb més afinitat entre si que amb altres alumnes. El subgrup format per les quatre arrels quartes d'u, per exemple, o les arrels cinquenes d'u, eren diferents grupets d'amics que s'avenien entre si. No és gens estrany que hi hagués alumnes més sociables i d'altres que ho fossin menys; l'u era el més sociable de tots i s'entenia no només amb la majoria de subgrups, sinó amb completament tots els petits (i no tan petits) grupets de la classe. Tot i això, el seu rol en aquests grups no era gaire determinant i, com que tothom es quedava indiferent després d'haver passat una estona amb ell (pobre u!), l'anomenaven alumne neutre.

El professor, després d'haver dit per enèsima vegada que la idea que conduïa al producte i a la potenciació era la mateixa, però que com que es desenvolupaven a partir de conceptes diferents les conseqüències no eren iguals (ni molt menys!), va fer rumiar als elements de la classe quines diferències hi havia entre $-a^b$ i $(-a)^b$ i els va fer veure que $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$ i, un cop va haver-se assegurat que tots i cadascun dels alumnes dominaven el concepte de potència, va decidir obrir un meló i, mentre se'l cruspia àvidament (cal dir, en defensa seva, que feia molta calor i que la panxa feia estona que li raucava), va preguntar: «I aleshores, què significa $a^{\frac{1}{2}}$?»

D'alumnes, en aquella classe, n'hi havia, com a tot arreu, de totes menes. Mentre que l'1 era bastant positivista, el -1 era pessimista de mena, alhora que l'*i,* o el -*i*, no es veien gaire afectats per aquesta mena de tendències. A ells, en canvi, se'ls veia sovint representant coses imaginàries. Eren tots ells ben diferents i complexos, fins i tot algú amb pa a l'ull els hauria distingit; però, tot i això, ordenar-los per alçada era una tasca impossible. No n'hi havia de més grans o de més petits, i fins i tot el mòdul, que de vegades, en situacions de complexitat, s'utilitza per tenir algun criteri, era una eina inútil per a aquest propòsit. Formaven un grup, però no eren pas semblants, i qui hagués volgut endreçar-los mesurant-los s'hauria convertit, per molt astut que fos (o potser justament per això), en el Sísif d'aquells temps.

A la classe, els alumnes estaven desconcertats. Què redimonis volia dir *a multiplicat per si mateix mitja vegada*? No semblava que tingués cap mena de sentit! Potser, deien alguns, el Circumferència els havia parat una trampa: no seria la primera vegada, temps enrere els havia demanat que obtinguessin 21 sumant quatre dels nombres 1, 3, 5, 7 i 9, si volien repetint-ne, i s'havien estat una bona estona perdent el temps. D'altres, però, seguien intentant trobar un significat a aquella expressió: haurien trobat curiós que l'exponent no pogués ser no natural. Tot plegat va començar a aclarir-se quan el professor, havent-se acabat el meló, que era molt sucós, va escriure a la pissarra $(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\cdot 2}=\ldots=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$.

Mentre la majoria d'alumnes estaven engrescats amb els seus debats matemàtics, el número 1, que com que anava a infinites classes del supergrup d'arrels enèsimes d'1 ja havia sentit aquella classe unes quantes (però no infinites) vegades, estava absort en els seus pensaments. Semblava que, ves a saber com, el -1 li havia contagiat una mica del seu pessimisme. Sentia la paraula *potència* i no podia parar de pensar en aquella absurditat en què volien convertir-se alguns estats del món humà, que fins començaven guerres en què només feien que perdre credibilitat, però sobretot vides humanes, vides humanes!, que haurien pogut donar als nombres noves explicacions de la seva essència però que sobretot haurien contribuït a la construcció d'un món millor per a tothom. A vegades no entenia alguns homes i l'inundava una tristor trasbalsadora, hi sucumbia; però de seguida es recuperava recuperant el seu optimisme, creient que la resta d'homes, que semblaven honestos, justos i compromesos, frenarien aquells que obraven sense veure que es feien mal a si mateixos.

Ràpidament, els altres elements del grup van intuir cap on anava el professor i aquest els digué que, efectivament, $a^{\frac{1}{2}}$ representava aquell nombre que, multiplicat per si mateix (o, el que era el mateix, elevat al quadrat), donava a. A continuació els preguntà que què volia dir, seguint amb el mateix raonament, $a^{\frac{3}{7}}$, i aquesta vegada els alumnes van veure, al cap de poc, que era aquell nombre que en elevar-lo a 7 s'obtenia el cub de a. A continuació, el professor els va introduir una altra notació: $\sqrt[c]{a^b}=a^{\frac{b}{c}}$. Arribats a aquest punt, el Circumferència va pensar que potser era moment de passar a alguna cosa més senzilla que les arrels, i els va demanar que li diguessin què significava $a^{-|b|}$. Als alumnes, però, els va costar una mica trobar-ho, perquè era diferent pensar en un exponent fraccionari, com portaven estona fent, que en un exponent negatiu, que els venia de nou. O això creien ells.

El que ells pensaven és que això s'havia de raonar d'una manera semblant al cas anterior. Provaven diverses combinacions de potències, però... $(a^{-|b|})^{-|b|}=a^{b\cdot b}$, però això no resolia res perquè no explicava què volia dir $a^{-|b|}$. Al cap d'una estona, al nombre *i*, que tenia una imaginació ben pura que li servia en ocasions com aquesta, es va adonar que com que $\frac{a^c}{a^{|b|}}=a^{c-|b|}$, $a^{c-|b|}=a^c\cdot a^{-|b|}$ i, per tant, $a^{-|b|}$ havia de ser, per força, $\frac{1}{a^{|b|}}$. Aquesta era la manera de pensar d'un nombre imaginari pur, que ja es veu que era ben diferent de la manera de pensar que tenia el nombre 1, que, a més de ser complex, era natural. Es feia palès que, per molt que l'1 i l'*i* pertanguessin al mateix grup, eren ben diferents l'un de l'altre.

Quan en van haver tret l'entrellat, el professor els va felicitar per haver copsat el funcionament de les potències (calia que els alumnes no es desmotivessin!) i els va plantejar una qüestió que van resoldre ràpidament: què volia dir a^0? El -*i*, que tenia la imaginació tan desenvolupada com l'*i*, va veure ràpidament que $a^0=a^{b-b}=\frac{a^b}{a^b}=1$, i van donar el problema per resolt. El professor Circumferència, però, aleshores, va puntualitzar-ho dient que o^a, si $a\leqslant 0$, era una indeterminació: no es pot dividir entre 0.

L'*i* i el -*i* s'avenien molt. Un no anava enlloc si l'altre no hi era: eren carn i ungla. Formaven part, sempre, dels mateixos grups i això era perquè, encara que també tenien moltes coses en comú, funcionaven l'un a la inversa de l'altre. Així com l'ungla sempre va amb la carn però l'ungla és dura i la carn no, l'*i* solia utilitzar la seva imaginació en les coses que l'envoltaven, aplicava la vida als somnis i a la vida els somnis; mentre que el -*i* tenia un caràcter més aviat de somiatruites i a la classe sovint es distreia pensant en coses que, encara que a l'inici potser tenien alguna mena de relació amb allò que succeïa al seu voltant, de seguida prenien un rumb completament diferent i s'allunyaven del seu entorn irremeiablement. L'*i* i el -*i* compartien el resultat de les seves potències d'exponents naturals, però si hom recorria primer les de l'*i* i després les del -*i*, o al revés, es trobava sempre avançant per acabar retrocedint: l'un desfeia tot el que feia l'altre.

El professor Circumferència els va explicar, llavors, qui era el nombre *i*. Era una situació una mica curiosa: una circumferència explicava a un nombre qui era aquell nombre! Comptat i debatut, però, l'*i* tenia unes ganes boges que li diguessin qui era ell, què hi feia allà, per què era i no deixava de ser: era d'aquella mena de números que pensen que cadascú és, més que allò que un es creu que és, allò que els altres pensen que és. De manera que escoltava, ben atent, les explicacions de la circumferència: que si un nombre real elevat al quadrat havia de ser per força positiu, però que això no significava que els negatius no tinguessin arrel quadrada sinó que aquesta era un nombre *i*mag*i*nar*i*, i que això donava peu a pensar en el conjunt dels nombres complexos, i que patatim-patatam, que si naps... que si cols... Per al -*i* allò ja només era una remor murmuriosa com la d'un mar encalmat, que contrastava amb la vivacitat i la rotunditat dels pensaments que li corrien pel cap, que li anaven d'un costat a l'altre sens parar, tant, que hauria resultat difícil saber si era ell qui donava voltes a un problema o si era el cap allò que li rodava, o els problemes, o tot. Però era ell, qui dominava la situació: $a^{\pi}, a^{\sqrt{2}}$, què eren!, què dimonis volien dir! *a* multiplicada per si mateixa π vegades! *a* multiplicada per si mateixa $\sqrt{2}$ vegades! Això segon... bé, això potser encara tenia alguna mena de sentit: era l'operació que repetida dues vegades equivalia a elevar un nombre al quadrat. Però clar, era una explicació insatisfactòria. Bé, potser es podria acceptar, aquesta expliació... Però a^{π} , a^{π} ! Això no tenia cap mena de sentit!

I encara sort que el -*i* no tenia ni un sol sentit dedicat a percebre la classe que, si no, ja s'estaria preguntant què diantre significava $a^{\sqrt{i}}$. En aquell moment, el seu amic *i* se sentia més ple que mai abans: per fi s'entenia! I el -*i* s'estava privant del plaer de conèixer-se millor a si mateix, mentre tots els seus companys s'adonaven per primera vegada de la importància que tenien, qui eren i per què es comportaven com es comportaven. L'1 i el -1 també començaven a comprendre els seus companys: ara tot quadrava, encaixava i prenia un sentit! Això, era, això! Ara es veien al mirall i es reconeixien, sí, aquells eren tots i cadascun d'ells, les arrels vintenes d'1! Però, no, faltava algú. El -*i*, que seguia absort en les seves preguntes que semblava que no tinguessin resposta. El van fer tornar a la realitat, ara que ja es comprenien, li van explicar qui eren ells i qui era ell, però ell hauria trobat hipòcrita encomanar-se a l'alegria dels altres perquè sabia que, en altres grups del seu curs, hi havia qui encara no sabia qui era. Qui pertany al grup de $\sqrt[\sqrt{2}]{1}$, què significa a^{π} ? Els altres no van trigar a veure que aquelles preguntes eren molt més difícils de respondre que res del que havien treballat aquell dia; el -1 ràpidament conclogué, negatiu, que allò no tenia solució, mentre l'1 animava, esperançat, l'*i*, que intentava una cosa i després l'altra, sense pausa però infructuosament, i la resta es rebatien les idees els uns als altres; a la fi, però, res no semblava satisfactori i tot semblava un cul-de-sac.

Per sortir d'aquell atzucac havien de tornar enrere, però no podien deixar el misteri sense resoldre i amb prou feines n'havien sortit que ja hi tornaven a ser. Però quan hi tornaven ho feien per camins diferents cada vegada, cada cop s'adonaven de coses noves i es meravellaven de la quantitat de coses que aprenien. Una vegada, l'*i* va descobrir que, en $a^{(b^c)}$, *c* indicava el nombre de vegades que *a* s'havia d'elevar a *b*, s'adonà que *c* indicava el nombre de vegades que s'havia d'efectuar una potència. Si *c* hagués, al seu torn, estat elevada a *d*, i potser *d* elevada a *e*, i *e* a *f*, i *f* a *h*...! Qualsevol operació es podia repetir i sempre hi havia una manera d'indicar quantes vegades es repetia, creia l'*i*, i si no, sempre es podia inventar una manera d'indicar-ho. I que aquestes petites descobertes fossin significants o no, semblessin determinants o deixessin de semblar-ho, no tenia cap importància: el que realment valia la pena era trencar-se el cap, experimentar amb els nombres i amb les operacions, entendre què deien, passar una estona bonica pensant junts i per separat, apassionadament, i sentir-se ple després d'entendre quelcom, per minúcia que fos.

S'encomanà l'entusiasme al professor, que els parlà del pla complex. Els elements del grup $\sqrt[20]{1}$, que havien vist que en $(-|a|)^{\pi}$ les aproximacions els servien de poc, es van animar creient que potser això sí que els serviria per resoldre-ho d'una vegada per totes, però en adonar-se que $-2=2_{180^o}=2_{540^o}=2_{-180^o}=\ldots$ s'endugueren una decepció, car $180\pi^o \neq 540\pi^o \neq -180\pi^o \neq \ldots$ i, per tant, $(-|a|)^{\pi}$ no estava ben definit i $|a|^{\pi}$ només ho estava pel conjunt dels nombres reals. Pel mateix motiu, d'arrels π-èsimes d'1 o bé n'hi havia infinites o bé era una indeterminació, però els alumnes s'estimaven més la primera interpretació, perquè així tenien més companys (infinits més!) i perquè trobaven bonic un grup on hi hagués tots els $1_{2k\,rad}$ (sempre que $k \in \mathbb{N}$), totes les arrels π-èsimes d'1.

Ara bé, això implicava quelcom que, a primera vista, semblava una mica impossible: si hom unia aquestes infinites arrels π-èsimes d'1 en el pla complex, el dibuix resultant havia de ser una circumferència, perquè com que eren infinites arrels, el polígon resultant havia de tenir infinits costats i, a més a més, distrubuïts regularment; però la circumferència composta pels elements de mòdul 1, que aparentment havia de ser la mateixa que aquesta, contenia, a més de les arrels π-èsimes d'1, infinites altres arrels enèsimes d'1 (com ara *i*) i, per tant, no era la mateixa. Eren les circumferències conjunts de punts amb subconjunts, cadascun dels quals era una altra circumferència? I aquestes *subcircumferències* també estaven formades per altres *subcircumferències*, i així fins a l'infinit? Ja que el seu professor era una circumferència, van decidir que li ho preguntarien a ell. Ell els digué, però, que allò eren figues d'un altre paner, que aquell dia, si el cap no els havia explotat, l'havien explotat ells, i que ja en parlarien un altre dia, amb més calma, quan arribés el moment.

I el moment arribà, i en parlaren; el professor els guiava i ells debatien fervorosament, trobant entre tots la millor resposta per a cada pregunta, combinant els seus caràcters que, encara que eren elements del mateix grup, eren ben diferents. I era aquesta sintonia entre diferents, aquest respecte mutu, aquesta col·laboració desinteressada i aquestes ganes d'aprendre el que els feia gaudir i progressar en el món de les matemàtiques, com les xifres enteres de $(10^{\pi})^{\pi}$, que són totes deu ben diferents però que juntes són un tot amb significat, o com les lletres d'un alfabet, que juntes formen els mots però, separades, també parlen per dir-nos, per exemple,

$$\Phi$$