

Amor exponencial

En un lloc geomètric de l'espai, el nom del qual no vull recordar, vivia una funció exponencial de joventut encisadora i noble llinatge. Va decidir anar a passejar una nit a prop de la platja, on les onades descrivien una forma fractal perfecta, els peixos saltaven en forma de paràboles precises i l'horitzó semblava acostar-se asimptòticament a la lluna. Mentre caminava vora l'aigua, mullant-se només els extrems relatius, va començar a sentir una música que convergia als seus receptors auditius. A mesura que s'hi anava acostant, va veure com aquells sons provenien d'una festa que s'estava celebrant a la platja i, per curiositat, va decidir anar-hi a fer una ullada.

Com que l'exponencial era molt tímida, no s'atrevia a parlar amb ningú; es limitava a observar com les funcions sinusoidals feien gala de la seva periodicitat i com les cotangents feien moviments de ball increïbles, com el salt infinit en una asímptota. Al cap d'un instant infinitesimal dt , se li va apropar un grup abelià de funcions de gran varietat: polinòmiques, logarítmiques... Fins i tot hi havia unes radicals anarquistes i una que havia quedat a trossos en caure per una discontinuïtat. En fi, coses que passen habitualment. Un dels membres d'aquest conjunt, una arctangent d'allò més refinada, va proposar a l'exponencial d'integrar-se al seu grup, però aquesta va respondre amb un gest d'indiferència («A mi, m'és igual integrar-me o no: tot em sembla el mateix...», digué). Després d'un seguit d'arguments racionals i una succulent oferta de constants d'integració, l'exponencial va optar per integrar-se indefinidament en aquell grup.

Era la primera vegada que l'exponencial es relacionava amb unes funcions tan banals. Fins ara només havia tingut reunions formals amb altres nobles exponencials. En canvi, aquelles altres funcions tenien zeros per tot arreu, asímptotes obliqües, derivades enèsimes que acabaven sent constants, dominis finits... Per a una funció injectiva com ella, allò era un desastre. No obstant, va intentar desfer-se de prejudicis i els va donar una oportunitat. A mesura que anava passant el temps, s'adonava que, realment, tenien propietats comunes i no eren tan diferents com semblaven. Dins d'aquell grup, l'exponencial es va fixar en una funció polinòmica de tercer grau. Es miraven dissimuladament, i somreien sense que es notés, fins que al final la funció polinòmica va demanar-li a l'exponencial si volia sortir a ballar.

Enmig del ritme lent i les sèries melòdiques en progressió geomètrica, van començar a ballar en un mateix radi de convergència. Les seves asímptotes semblaven acostar-se més i més, i les seves tangents començaven a igualar-se. El ritme es va anar animant, i les funcions van començar a fer rotacions a través dels eixos. Cada cop es tallaven en més punts, fins que eren infinits. Finalment,

en el punt més àlgid de la cançó, es van arribar a derivar a sobre, traient-se així les constants. Les dues funcions estaven exhaustes després d'aquest ball. Notaven que hi havia alguna cosa que els unia i que els feia feliços, però semblava massa complex com per a descriure-ho. Van acordar que es tornarien a trobar quan poguessin, i els dos van tornar a les seves respectives llars.

Quan l'exponencial va arribar a casa, els seus pares ja ho sabien tot: la festa, la funció polinòmica, el ball... Estaven tristos i decebuts. Com podia ser que una exponencial de tan alt llinatge es relacionés amb aquelles vulgars funcions? Tot seguit, van procedir a explicar-li tots els perills que tenien les polinòmiques: que si tenen tot tipus d'infeccions (van arribar a explicar-li els riscos de fer composició de funcions sense protecció), que si no són de fiar (els punts d'inflexió són de pobres), que si això feia perillar la continuïtat de la seva dinastia... «Si Euler va crear les funcions exponencials a part de les polinòmiques, per alguna cosa serà...» va afegir la mare, raonant que si separaven entre exponencials i polinòmiques «no era per classisme, sinó per ser ordenats». El pare va sentenciar amb un «A l'infinit, nosaltres som infinitament superiors!».

L'exponencial estava confosa. Per una banda, no volia decebre els seus pares, però per l'altra s'estimava la polinòmica. Passava els dies apàtica, veient com la vida li passava paral·lela, sense semblar que pogués arribar a influir-hi mai. Abstreta en els seus pensaments, es tancava a l'habitació i jugava amb unes derivades que li havien regalat de petit, mentre buscava la solució al seu problema. S'ofegava en un mar de dubtes i preguntes: «Per què he de renunciar a la polinòmica?» «Què fa que siguem diferents?». Les gotes de les seves llàgrimes només l'enfonsaven més avall encara. Al final, ja no sabia ni què era. Per això, va prendre la decisió de anar a descobrir quins eren els seus orígens.

Va fer les maletes amb el més imprescindible i, de nit i dissimuladament, va marxar de casa per la finestra. Va deixar una nota escrita pels seus pares per tal que no es preocupessin, explicant-los els motius del seu viatge i reiterant-los que els estimava amb tots els seus límits infinitesimals. Tot seguit, va prendre rumb cap al lloc on descobriria la seva història i on podria resoldre els seus dubtes: Basilea, ciutat natal de Leonhard Euler. Amb els pocs diners que tenia, va pagar el seu bitllet d'avió cap a Suïssa i de seguida l'efecte Bernoulli va fer enlairar aquell prodigi de la mecànica i l'enginyeria.

A l'avió, podia veure els núvols com mai abans no els havia pogut veure, suspesos al cel com si els haguessin aplicat una transformació segons l'eix d'ordenades. A més, tenien formes molt diverses: una el·lipse, un sumatori infinit, una fracció contínua... Fins i tot, una li va recordar la polinòmica.

En aquell moment, va cloure els ulls i va sospirar, amb l'esperança que podria resoldre els seus misteris. Finalment, les muntanyes nevades suïsses, tan punxegudes que no es podien ni derivar, van aparèixer a l'horitzó. Després d'una lleugera baixada, l'avió va tornar a contactar amb l'eix d'abscisses, i l'exponencial va dirigir-se a Basilea.

La ciutat era preciosa. El Sol brillava amb una fulgor majestuosa que quedava reflectida pel riu Rin. Al cap d'una estona de passeig, va arribar a la biblioteca que contenia tota la informació que estava recercant. Allà hi havia recopilada tota la informació sobre els orígens de les exponencials i les seves propietats. Amb una il·lusió impacient, va començar a llegir els llibres que li respondrien els seus dubtes existencials.

En primer lloc, va veure que abans que s'introduïssin les exponencials, John Napier va inventar els logaritmes. Recordava haver vist alguns logaritmes en aquella festa, i també n'havia sentit a parlar anteriorment. Havia sentit els seus pares dir que eren uns «invertits i una aberració», ja que anaven exactament al contrari que les exponencials, i que les havia d'evitar com fos, ja que segons ells «si et composessis amb un logaritme, et sortirien fills lineals!». No obstant, el fantasma dels seus pares no era el més adequat per recordar en aquells moments, i va decidir que, com a la festa, intentaria deixar els prejudicis en una altra banda.

Al cap d'una estona i després d'un intens aprofundiment en els logaritmes, va arribar al moment de la creació. Contràriament a allò que deien les llengües populars, no va ser Euler qui va descobrir el nombre e , sinó que fou Jacob Bernoulli qui, estudiant l'interès compost, va preguntar-se pel valor de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Aquelles paraules eren poesia per a l'exponencial. Saber qui era l'omplia de vitalitat i d'alegria, però només amb la seva definició no en feia prou per treure l'entrellat dels seus problemes. Malgrat això, s'estava fent tard, i va decidir que ja continuaria l'endemà.

El dia després, ben d'hora al matí, l'exponencial va reprendre el seu redescobriment personal. Volia acabar de desvetllar els misteris que la sessió anterior de lectura li havien deixat en el cos i que tan malament l'havien fet dormir. Finalment va arribar a Leonhard Euler, de qui hi havia una immensitat de documents, llibres... Va veure com va ser ell qui va donar el nom a la constant que Bernoulli va descobrir: e d'Euler. Havia sentit milers de vegades com el nom de les funcions

exponencials venia d'Euler i com per gràcia divina els havia estat concedida la lletra e només per al seu propi ús. La funció exponencial es va endur una decepció al veure que, realment, la lletra e no tenia res de diví. Euler va decidir donar-li aquest nom perquè era ja estava utilitzant la a en un altre treball seu, i e era la següent vocal.

Després d'una intensa lectura, va adonar-se de la importància que havia tingut Euler en les exponencials. Ell va ser qui els va donar totes les propietats, i qui en va estendre l'ús en les matemàtiques de l'època. Mentre anava llegint totes les propietats de les exponencials, va arribar a copsar perquè els seus pares estaven tan orgullosos de ser exponencials. Tenien aplicacions a tot arreu, des de les distribucions estadístiques fins, més preeminentment, al càlcul, on tenien l'honor de ser les funcions que, en derivar-se, quedaven exactament iguals. Entre moltes altres definicions, límits, desigualtats... va trobar una definició que la va deixar xocada:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aquella definició venia donada per les sèries de Taylor, un matemàtic britànic coetani d'Euler. Va mirar-se-la del dret i del revés, però no s'ho podia creure. Allò volia dir que, realment, les funcions exponencials són polinomis estesos fins a l'infinit? Aquella era la resposta que necessitava. Realment, les funcions polinòmiques i les funcions exponencials no eren tan diferents ni separades, ni Euler «va crear les exponencials a part de les polinòmiques». Per tant, l'exponencial va acabar d'adonar-se que els seus pares no tenien raó, i que les aparents diferències no haurien de semblar un problema per a la relació amb la polinòmica.

Un cop va haver acabat de documentar-se sobre totes els seus orígens, l'exponencial ja es va veure amb cor de tornar a casa. Per fi tenia els arguments racionals per demostrar que la seva relació amb la polinòmica era legítima. De nou a l'avió, recordava els nervis que havia tingut a l'anada, i no sabia si en aquell moment estava més nerviosa o no. Com reaccionarien els seus pares a la seva tornada? És més, com reaccionarien davant de la seva insistència amb la polinòmica? No obstant, aquella vegada era diferent: l'exponencial estava segura de si mateixa.

Finalment, va arribar a casa. La situació era incòmoda com cap altra que hagués viscut mai. No obstant, els seus pares no van trigar a abraçar l'exponencial, amb llàgrimes que baixaven per les seves convexitats i dient «T'havíem trobat a faltar». Una vegada l'exponencial s'havia instal·lat degudament, van tenir una llarga conversa sobre la polinòmica. L'exponencial els va explicar tot allò que havia vist, des de la seva definició fins a les propietats, insistint en la seva expansió de

Taylor. Els pares semblaven incrèduls: Tot un món de preconcepcions assumides sense fonament lògic i de prejudicis cap a les altres funcions se'ls estava esfondrant. La conversa va quedar sense conclusió, com una conjectura sense demostració trivial. Dies i nits van passar, i el silenci regnava a la llar exponencial. L'exponencial es tancava a l'habitació, i recordava aquells temps d'incertesa.

Al cap d'algunes rotacions terrestres, les paraules «Hem de parlar» van trencar l'absència d'ones sonores. Els pares, amb visible emoció, van donar el vistiplau a la relació entre l'exponencial i la polinòmica. Era evident que hi havia una part dins seu que es resistia a aquella decisió, però seria massa irracional (fins i tot per una exponencial) negar-se al progrés. I en aquell moment, les mirades ho deien tot, i qualsevol altra paraula sobrava. L'exponencial es va abraçar als seus pares, en una mescla de joia i èxtasi.

Després de l'aprovació dels seus pares, ja se sap com van sempre les històries dels enamorats. L'exponencial i la polinòmica varen poder acabar vivint junts en una casa molt bonica, situada al camp complex. L'exponencial va esdevenir directora d'una fàbrica de neperians, i la polinòmica va dedicar-se al ball professional, assolint un gran reconeixement i una gran fama. De tant en tant, a les dues funcions els agradava recordar com es van conèixer, posant música i ballant durant llargues hores. Dansaven amb gran gracilitat, i s'allunyaven i s'apropaven com les funcions sinusoidals ho fan amb l'eix d'abscisses. Juntes, formaven un cos de revolució definit, que variava de forma segons la melodia.

Un cop s'acabava la música, les seves gràfiques es feien tangents, cada cop en més i més punts. Cada vegada la seva diferència tenia més i més arrels comunes. Finalment, s'encenia l'espurna. Es derivaven l'una a l'altra, traient-se les constants de sobre. Cada cop més lleugeres, les funcions tornaven a revolucionar-se l'una sobre l'altra, però convergint cap a la seva habitació. Es varen disposar en forma cartesiana, i la resta... ho deixo a la imaginació del lector.

És així com l'exponencial i la polinòmica van aconseguir compondre una funció. Els nous pares, orgullosos, contemplaven la seva llar, i es meravellaven d'haver pogut salvar les diferències provocades per creences irracionals. De tant en tant, feien una petita excursió a la platja on es van conèixer, i recordaven els seus ingenus teoremes d'amor. Contemplaven l'horitzó asimptòtic, mentre, junts, vivien el seu amor exponencial.