



LVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de Desembre de 2020, de 16 a 19.30 h.

1. Siguin a i b dos nombres reals tals que $1010 \leq a, b \leq 2020$. Demostreu que

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \leq \frac{9}{2}.$$

2. Tenim una taula $n \times n$ amb $n \geq 2$. Escrivim en aquesta taula els nombres naturals $1, 2, \dots, n^2$, un en cada casella i en qualsevol ordre. Demostreu que sempre existeixen dues caselles adjacents tals que els nombres x, y que contenen satisfan

$$|x - y| \geq \frac{n}{2} + 1.$$

(Dues caselles són adjacents si comparteixen un costat.)

3. Trobeu totes les parelles d'enters positius (x, y) que són solucions de l'equació

$$\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y} = x + y.$$

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.