Problemes Divendres 15

1. Tenim un quadrat de vèrtexs A, B, C, D i un punt M qualsevol interior. Unim M amb cadascun dels quatre vèrtexs i obtenim quatre triangles ABM, BCM, CDM i DAM. Demostreu que els quatre baricentres d'aquests triangles formen un quadrat, i trobeu la seva àrea en funció de l'àrea del quadrat inicial.

   Solució. Unint els punts mitjans dels costats del quadrat $ABCD$ s'obté un altre quadrat d'àrea meitat de l'àrea del quadrat donat.

   Una homotècia de raó $2/3$ transforma aquest quadrat en el dels baricentres. L'àrea serà $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$ de l'àrea inicial. Es pot evitar la homotècia emprant semblança de triangles.

2. Sobre cada vèrtex d'un polígon regular de 2018 costats s'hi col·loca un nombre del conjunt $\{1,2,\ldots,1008\}$. Demostreu que hi ha quatre vèrtexs A, B, C i D diferents i ordenats en sentit horari tals que els números a, b, c, d assignats a ells compleixen que $a + b = c + d$.

   Solució. El polígon té 1009 diàmetres. A cada diàmetre d'extrems A i B, numerats amb a i b respectivament, li assignem el valor $|a - b|$ que és un nombre enter tal que $0 \leq |a - b| \leq 1007$. Com només hi ha 1008 valors possibles per als 1009 diàmetres del polígon, hi ha d'haver almenys dos diàmetres AB i CD amb el mateix valor. Sense perdre generalitat, podem suposar que $a \geq c$ i $b \geq d$. Llavors, $a - c = b - d$ i per tant $a + b = c + d$.

3. Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ una successió estrictament creixent d'enters positius tals que per a tot $n \geq 1$ es compleix que a_n divideix $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$. Proveu que existeix un enter positiu N tal que $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ per a tot $n > N$.

   Solució. Sigui $(k_n)_{n\geq 1}$ la successió d'enters positius definida per $a_n k_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$. Llavors $a_{n+1}k_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = (k_n + 1)a_n$. Com $a_{n+1} > a_n$ llavors $a_n k_{n+1} < a_{n+1}k_{n+1} = (k_n + 1)a_n$ d'on s'obté $k_{n+1} < k_n + 1$ i per tant $k_{n+1} \leq k_n$.

   Com $(k_n)_{n\geq 1}$ és no creixent és estacionaria. És a dir, existeix un enter positiu N tal que $k_n = k$ per a tot $n \geq N$. Sigui $n \geq N$, llavors de

$a_{n+1}k_{n+1} = (k_n + 1)a_n$ resulta

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{k+1}{k}\right) \quad \text{i} \quad a_{n+s} = a_n \left(\frac{k+1}{k}\right)^s$$

per a tot enter positiu s, com es pot demostrar fàcilment per inducció. Com que a_{n+s} és enter i $(k, k+1) = 1$ llavors $k^s | a^n$ per a tot enter positiu s, però això és impossible si $k \neq 1$. Per a $k = 1$ és $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, com volíem demostrar.

Problemes Dissabte 16

4. Siguin a, b, c tres nombres reals tals que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ per a tot $x \in [-1, 1]$. Proveu que $|a| + |b| + |c| \leq 4$.

   Solucio. Sigui $A(x) = ax^2 + bx + c$. Per a $x = -1, x = 0, x = 1$ es té que $A(0) = c, A(1) = a + b + c$ i $A(-1) = a - b + c$. D'aquí es desprèn que $a = \dfrac{A(1) + A(-1) - 2A(0)}{2}, b = \dfrac{A(1) - A(-1)}{2}$ i $c = A(0)$.

   Per tant,

$$\begin{aligned}
|a| + |b| + |c| &= \left|\frac{A(1) + A(-1) - 2A(0)}{2}\right| + \left|\frac{A(1) - A(-1)}{2}\right| + |A(0)| \\
&\leq \frac{|A(1) + |A(-1) + 2|A(0)|}{2} + \frac{|A(1) + |A(-1)|}{2} + |A(0)| \\
&\leq \frac{1 + 1 + 2}{2} + \frac{1 + 1}{2} + 1 = 4
\end{aligned}$$

5. Al quadrilàter convex $ABCD$ s'elegeixen punts A', B', C' i D' a l'interior dels costats AB, BC, CD i DA respectivament, tals que

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{BB'}{B'C} = \frac{CC'}{C'D} = \frac{DD'}{D'A} = r.$$

   Calculeu, en funció de r, el quocient

$$\frac{[A'B'C'D']}{[ABCD]},$$

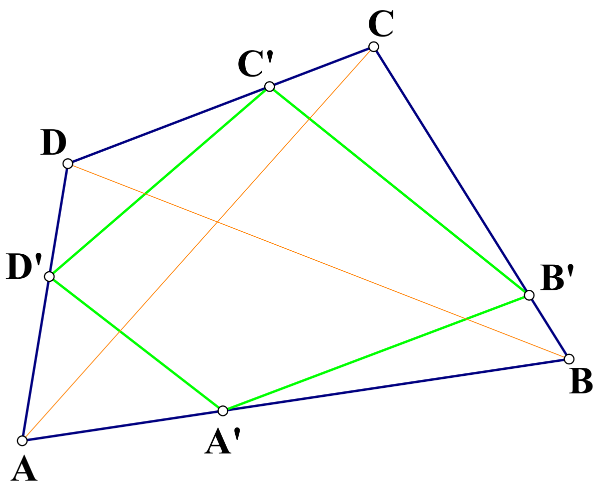
   on $[A'B'C'D']$ vol dir l'àrea del quadrilàter $A'B'C'D'$ i $[ABCD]$ vol dir l'àrea del quadrilàter $ABCD$.

   Solució. Aplicant el Teorema del Sinus als triàngles $DD'C'$ i ACD s'obté

$$\frac{[DD'C']}{[ACD]} = \frac{DC'}{DC} \cdot \frac{DD'}{DA} = \frac{DC'}{CC' + C'D} \cdot \frac{DD'}{DD' + D'A} = \frac{r}{(r+1)^2}$$

   i

$$[DD'C'] = \frac{r}{(r+1)^2}\,[ACD]$$



Igualment s'obté

$$[DAA'] = \frac{r}{(r+1)^2}\,[ABD]$$

$$[A'BB'] = \frac{r}{(r+1)^2}\,[ABC]$$

$$[CC'B] = \frac{r}{(r+1)^2}\,[CDB]$$

Per tant,

$$[A'B'C'D'] = [ABCD] - [DD'C'] - [DAA'] - [A'BB'] - [CC'B]$$

$$= [ABCD] - 2\,\frac{r}{(r+1)^2}\,[ABCD] = \frac{r^2+1}{(r+1)^2}\,[ABCD]$$

i

$$\frac{[A'B'C'D']}{[ABCD]} = \frac{r^2+1}{(r+1)^2}$$

6. Sigui a un nombre enter i $p \geq 3$ un nombre primer. Demostreu que el número

$$a^p + (a+1)^p + \ldots + (a+p-1)^p$$

és múltiple de p^2.

Solució. Quan $a = -\frac{p-1}{2}$ l'enunciat és clarament cert ja que $(a+i)^p + (a+p-1-i)^p = 0$ per a $0 \leq i \leq \frac{p-1}{2} - 1$ i tots els sumands es cancel·len, de manera que el resultat és 0 (i per tant múlltiple de p^2).

L'objectiu és ara demostrar que el residu de b^p módul p^2 només depèn del reste de b módul p. Per a això afirmem que donats $k, t \in \mathbb{Z}$, $(k + tp)^p - k^p$ sempre és múltiple de p^2. En efecte, observem que

$$(k+tp)^p - k^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} k^{p-i}(tp)^i - k^p = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} k^{p-i}(tp)^i.$$

Tots els sumands que apareixen són múltiples de p^2. Per a $i \geq 2$ això és clar, ja que p^i ja és un múltiple de p^2. Per a $i = 1$, el terme corresponent és $p \cdot k^{p-1} \cdot (tp) = tp^2 k^{p-1}$, i amb això hem provat l'afirmació.

Per concloure, observem que en la suma

$$a^p + (a+1)^p + \ldots + (a+p-1)^p$$

hi ha exactament un sumand que és congruent módul p amb cadascun dels números

$$\{-(p-1)/2, \ldots, (p-1)/2\}.$$

Per tant,

$$a^p + (a+1)^p + \ldots + (a+p-1)^p \equiv (-(p-1)/2)^p + \ldots + ((p-1)/2)^p = 0 \mod p^2,$$

com volíem.