VIII Olitele (Concurs Telemàtic). 51a Olimpíada SCM.

Enunciats, solucions, suggeriments

---

0. (problema de 2 punts.)
Posem els nombres naturals de l'1 al 9 en una matriu 3×3, un nombre en cada lloc i sense repetir-ne cap. Després formem sis nombres de tres xifres juxtaposant els nombres que apareixen en cada fila (d'esquerra a dreta) i els nombres que apareixen en cada columna (de dalt a baix).
a) Quin és el valor màxim que podem obtenir si sumem aquests sis nombres? I el valor mínim?
b) Quin és el valor més proper a 2014 que podem obtenir?

Respostes: a) màxim: 4698, mínim: 1962; **b)** 2016.

Si indiquem els nombres de la matriu com es pot veure a la figura de la dreta, el nombre que construïm amb els elements de la primera fila és $100a+10b+c$, i així amb els altres. La suma dels sis nombres de tres xifres que indica l'enunciat resulta ser $S = 200a+110(b+d)+101(c+g)+20e+11(f+h)+2i$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

El màxim s'obtindrà per $a = 9, \{b, d\} = \{8, 7\}, \{c, g\} = \{6, 5\}, e = 4, \{f, h\} = \{3, 2\}, i = 1$ i és $S_{max} = 4698$. Semblantment el mínim s'obtindrà donant valors creixents a les variables en l'ordre indicat, $a = 1, \{b, d\} = \{2, 3\}, \{c, g\} = \{4, 5\}, e = 6, \{f, h\} = \{7, 8\}, i = 9$. El mínim és $S_{min} = 1962$.

Per veure quins valors pot assolir S ens adonem que $S = 2\cdot(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+9\cdot(22a+12(d+b)+11(c+g)+2e+f+h)$ i com que $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tenim $S = 90+9\cdot(22a+12(d+b)+11(c+g)+2e+f+h) = 9\cdot(10+22a+12(d+b)+11(c+g)+2e+f+h)$ és a dir que S és múltiple de 9.
El múltiple de 9 més proper a 2014 és 2016 i podem veure que es pot obtenir posant $a = 1$ (observeu que per $a = 2$ el mínim passa de 2050), i, per exemple, $\{b, d\} = \{2, 3\}$, $\{c, g\} = \{4, 5\}$, $e = 9$, $\{f, h\} = \{7, 8\}$ i $i = 6$.

Suggeriments
Amb un programa d'ordinador podem veure que tots els múltiples de 9 entre el mínim i el màxim es poden obtenir. Sabríeu raonar-ho?
Sabríeu raonar, donat un nombre dels que es pot aconseguir, de quantes maneres es pot fer?

---

1. (problema de 2 punts.)
Quin és el múltiple positiu més petit del nombre A que té exactament B divisors positius?

L'enunciat tenia 4 models segons la contrasenya. A i B podien ser, cada un dels dos, 2014 o 2015. Resoldrem un cas: estudiarem quins són els múltiples positius de 2014 que tenen exactament 2015 divisors positius.

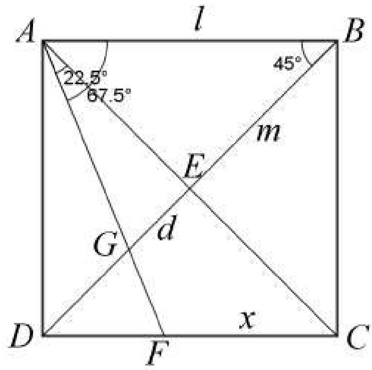
Resposta: $N = 2^{30} \cdot 19^{12} \cdot 53^4$
Cal recordar que el nombre de divisors de $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma ...$ és $n_{div} = (\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1)....$ Aleshores veiem que, perquè el nombre de divisors de N sigui $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, en la descomposició en factors del nombre N han d'aparèixer 3 factors, amb exponents 4, 12 i 30. Com que $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ qualsevol múltiple de 2014 tindrà aquests tres factors. Per tant els nombres que busquem no podran tenir cap altre factor primer i el que ens interessa, el més petit, serà el que tingui l'exponent més gran per al 2, i el més petit per al 53. És $N = 2^{30} \cdot 19^{12} \cdot 53^4$.

Suggeriments
Estudieu quina relació hi ha d'haver entre A i B (nombres enters més grans que 1) perquè...
a) existeixi el múltiple positiu més petit del nombre A que té exactament B divisors positius.
b) el conjunt de múltiples positius de A que tenen exactament B divisors positius sigui finit. Quants elements té aquest conjunt, en aquest cas?

---

2. (problema de 3 punts.)
Considerem un quadrat de vèrtexs $ABCD$ que s'han indicat en sentit horari i E és el centre d'aquest quadrat. Els punts de tall de la bisectriu de l'angle $\angle DAC$ amb els segments DC i DB són, respectivament, F i G. Si la longitud de EG és d, quina és la longitud de FC?

Resposta: 2d



Com que l'angle en B del triangle ABG és de 45° i l'angle en A és de $45° + 22°30' = 67°30'$ es dedueix que l'angle en G també és $67°30'$ i, doncs, el triangle ABG és isòsceles amb $AB = BG$. El triangle DGF és semblant a l'anterior i, per tant, també serà isòsceles, en aquest cas amb $DG = DF$.
Si posem l la longitud del costat del quadrat, m la longitud de mitja diagonal, i x la longitud que busquem del segment FC, aleshores $AB = BG$ ens diu que $l = m + d$ i de $DF = DG$ obtenim $l - x = m - d$. Si restem les dues equacions obtenim $x = 2d$.

Altres idees per a la solució

Els triangles AEG i ADF són semblants perquè són triangles rectangles amb un angle agut igual. D'aquí es dedueix $DF = d\sqrt{2}$.
També són semblants els triangles AGB i FGD perquè tenen, cada un, un angle de 45° i els angles en G iguals perquè són oposats pel vèrtex. Això, pensant que $l = DF + x$ ens diu que $\dfrac{DF}{m-d} = \dfrac{DF + x}{m+d}$. Si ara posem $DF = d\sqrt{2}$ i operem arribem a $2\sqrt{2}d^2 = x(m - d)$. Però tenim que $l = m\sqrt{2}$ i, doncs, $x = l - DF = (m - d)\sqrt{2}$ i $m - d = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ i per tant $4d^2 = x^2$, és a dir que $x = 2d$.

També podem fer servir el valor exacte de $\tan(22°30') = \sqrt{2} - 1$.
Si l'apliquem en el triangle rectangle AEG trobarem $m = \dfrac{d}{\sqrt{2} - 1}$ i, per tant, $l = m\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})d$.
Si ara l'apliquem en el triangle ADF trobem $DF = l(\sqrt{2} - 1) = d\sqrt{2}$ i això ens permet deduir que $x = l - DF = 2d$.

Finalment, considerem interessant comentar la utilitat del teorema de la bisectriu interior, aplicant-lo als triangles AED i ACD.
La proporcionalitat entre els costats AE i AD i els segments EG i GD en què la bisectriu divideix el costat ED ens permet escriure $\dfrac{m}{d} = \dfrac{l}{m-d}$ i com que $l = m\sqrt{2}$ trobem $m = d(\sqrt{2} - 1)$.
El teorema indicat ens diu, en el triangle ACD que $\dfrac{2m}{x} = \dfrac{l}{l-x}$. Si substituïm $l = m\sqrt{2}$ i $m = d(\sqrt{2} - 1)$, operem, i aïllem x arribem a $x = 2d$.

Suggeriments
Podeu estudiar la generalització a un rectangle.
Considerem un rectangle de vèrtexs $ABCD$ que s'han indicat en sentit horari i E és el centre d'aquest rectangle. Els punts de tall de la bisectriu de l'angle $\angle DAC$ amb els segments DC i DB són, respectivament, F i G.
a) Si la longitud de EG és d, calculeu la longitud de FC en funció de l'angle $\alpha = \angle CAB$ que la diagonal CA forma amb el costat AB del rectangle.
b) Estudieu quin ha de ser l'angle α que fa que $\dfrac{FC}{EG}$ tingui un valor màxim.

---

3. (problema de 2 punts.)
Pendent de publicació.

---

4. (problema de 4 punts.)
Calcula en quants zeros acaba el nombre enter positiu

$$1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!$$

Resposta: La suma és $(n+1)!$. Per exemple per $n = 2014$ hem de considerar $2015!$, que acaba en 502 zeros.
Per intentar esbrinar quin és el valor de la suma, en calculem el valor per als primers valors.
Per a $n = 1$ la suma és 2. Per a $n = 2$ la suma és 6.
Per a $n = 3$ la suma és 24. Per a $n = 4$ la suma és 120.
Observem que aquestes sumes són, respectivament $2!, 3!, 4!$ i $5!$ i això ens permet conjecturar que la suma pot ser $(n+1)!$.
Ho podem demostrar per inducció. Suposem cert que

$$S(n) = 1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)!.$$

Hem de veure que

$$S(n+1) = 1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+2)!.$$

Si substituim el que ens diu la hipòtesi d'inducció ens queda:

$$S(n+1) = (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! \cdot (1 + n + 1) = (n+1)! \cdot (n+2) = (n+2)!$$

i queda demostrat el que volíem.

Per saber en quants zeros acaba $S(n) = (n+1)!$ hem de veure quants factors 10 té aquest nombre. Bastarà veure quants factors 5 té perquè segur que qualsevol factorial té més factors 2 que factors 5. Hem de comptar quants múltiples de 5 hi ha més petits que n, que són tants com la part entera de $\dfrac{2015}{5}$, que escriurem $\lfloor\dfrac{2015}{5}\rfloor$. Els múltiples de 25 afegeixen un altre factor 5, i n'hi ha $\lfloor\dfrac{2015}{25}\rfloor$. Els múltiples de 125 afegeixen un altre factor 5 i n'hi ha $\lfloor\dfrac{2015}{125}\rfloor$. Encara hem de considerar els múltiples de 625 que afegeixen un altre factor 5 i en són $\lfloor\dfrac{2015}{625}\rfloor$. En total, doncs, el nombre de zeros amb què acaba 2015! és $\lfloor\dfrac{2015}{5}\rfloor + \lfloor\dfrac{2015}{25}\rfloor + \lfloor\dfrac{2015}{1255}\rfloor + \lfloor\dfrac{2015}{625}\rfloor =$ 502.
I així mateix ho faríem per qualsevol altre valor de n.

Una altra idea per a la solució

També podem veure "directament" que $S(n) = (n+1)!$ si ens adonem que $(k+1)! - k!$, traient factor comú $k!$ es pot escriure $k! \cdot (k+1-1) = k \cdot k!$.
Això ens permet transformar la suma demanada en

$$S(n) = 1 + (2! - 1!) + (3! - 2!) + ... + (n! - (n-1)!) + ((n+1)! - n!) = (n+1)!$$

Suggeriments
Podeu generalitzar quelcom que hem comentat per tal d'escriure, si $0 < k < n$ són nombres enters, $k \cdot k! + ... + n \cdot n!$ com a resta de dos factorials.
Per altra banda, segurament no escau intentar raonar quina xifra és l'última que va just abans de tots els zeros del final en 2015!, ni en quina xifra comença, ni potser quantes xifres té, però en canvi sí que ens ho podem preguntar per $a = 2^{100}$ o per $b = 2^{1000}$, que podem veure de seguida que tots dos acaben en 6.
a) Quantes xifres té a? Amb quina xifra comença?
a) Quantes xifres té b? Amb quina xifra comença?

Continuarà!!!
Tanmateix volem que aquesta sigui una "publicació viva". Si ens envieu idees alternatives per a raonar la solució dels problemes plantejats, i comentaris o solucions als suggeriments d'ampliació que es proposen, serà una joia poder-los publicar. Demanem més "idees" que "solucions perfectament explicades".
