49a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM.

Problema 5.
Problema de 5 punts (es demanava un raonament detallat)

Enunciat.
Demostra que per a tot nombre natural $a > 1$, el nombre $a^4 + 4^a$ no és primer.

Idees per a la solució, que recullen les que s'han rebut.

Distingirem el cas a parell i el cas a imparell. Indicarem $N = a^4 + 4^a$

Si a és un nombre parell més gran que 1, aleshores N també és un nombre parell més gran que 1 i, doncs, no és primer. De fet es pot veure que és múltiple de 16.

Si a és imparell es tracta de veure com podem factoritzar N en dos factors, que haurem de comprovar que tots dos són nombres enters positius diferents de 1.
Primera idea:
Posem $a = 2k+1$ en el segon sumand i obtenim $N = a^4+4^a = a^4+4\cdot 4^{2k} = (a^2)^2+(2\cdot 4^k)^2$
Ara transformem l'expressió anterior per veure que es pot posar com una diferència de quadrats. Ens queda:
$N = (a^2)^2 + (2 \cdot 2^{2k})^2 + 4a^2 \cdot 4^k - 4a^2 \cdot 4^k = (a^4 + 2 \cdot 2^{2k})^2 - 4a^2 \cdot 4^k$,
expressió que ja podem descompondre en dos factors:
$N = (a^2 + 2 \cdot 2^{2k} + 2a \cdot 2^k)(a^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2a \cdot 2^k)$
Segona idea:
A partir de $N = a^4 + 4^a = a^4 + 4 \cdot 4^{2k}$ es tracta d'emprar la descomposició del polinomi $x^4 + 4m^4 = (x^2 + 2mx + 2m^2)(x^2 - 2mx + 2m^2)$ que es pot obtenir a partir de les arrels complexes del polinomi. S'arriba a una descomposició en factors anàloga a l'anterior.

Ara es tracta de veure que els dos factors són nombres enters (això és clar), positius (com que el nombre inicial i el primer factor és clar que són positius, també ho serà el segon) i més grans que 1.
És clar que el primer factor és més gran que 1, perquè ho és a^2 i li sumem nombres positius.
El segon factor el podem escriure així $a^2 + 2 \cdot 2^{2k} - 2a \cdot 2^{k+1} = (a - 2^k)^2 + 2^{2k}$. Com que $k \geq 1$ aleshores $2^{2k} > 1$ i com que li sumem un quadrat, tenim vist que tot el factor és més gran que 1.

Una solució molt interessant que s'ha rebut es basa en el *teorema dels dos quadrats*, de Fermat, que estableix que un nombre primer de la forma $4m + 1$ es pot representar de manera única com la suma de dos quadrats (excepte canviant-los dordre o emprant els mateixos nombres en negatiu).
El concursant que ha raonat d'aquesta manera veu que el nombre $N = a^4 + 4^a$, en el cas a imparell, és a dir $a = 2k + 1$ és de la forma $N = 4m + 1$.
Efectivament, operant, troba que $N = (2k+1)^4+4^{2k+1} = 4\cdot(4k^4+8k^3)+6n^2+2n+2^{4n})+1$.
L'eunciat dóna una manera d'escriure el nombre com a suma de quadrats $N = (a^2)^2+(2^a)^2)$.
Per altra banda podem escriure $N = (a^2)^2 + (2 \cdot 2^{2k})^2 - 4a^2 \cdot 4^k + 4a^2 \cdot 4^k$ i això és $N = (a^2 - 2a \cdot 2^k)^2 + (2a \cdot 2^k)^2$.
Per tant hem escrit un nombre de la forma $4m+1$ de dues maneres diferents com a suma de dos quadrats i, doncs, segons l'esmentat teorema de Fermat, no pot ser un nombre primer.

Algunes propostes de solució distingien els casos segons la xifra amb què acaba a. Amb aquest plantejament es pot arribar ràpidament a conclusions per a totes les terminacions excepte per als nombres que acaben en 5, que segurament ens portarien a haver de fer un raonament semblant al cas general de nombre imparell.