49a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM.

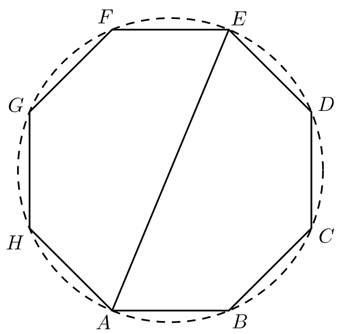
Problema 4. Problema de 4 punts

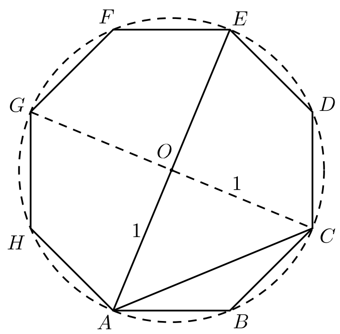
Enunciat.
Un octàgon regular $ABCDEFGH$ està inscrit en un cercle de radi 1. Calculeu el valor exacte de multiplicar les longituds dels segments que uneixen A a cadascun dels altres vèrtexs B, C, D, E, F, G i H.)

Una proposta de solució.

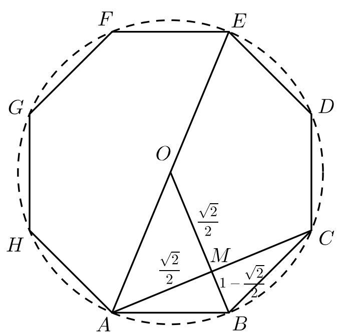
Es pot donar una solució amb l'ús de la trigonometria, fent ús del valor exacte de les raons trigonomètriques d'un angle $\alpha = 22°\ 30'$, que són $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ i $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Tanmateix donem tot seguit un raonament sense aquest recurs, amb el benentès que, d'aquesta manera estem deduint els valors anteriors sense necessitat de fórmules de trigonometria.

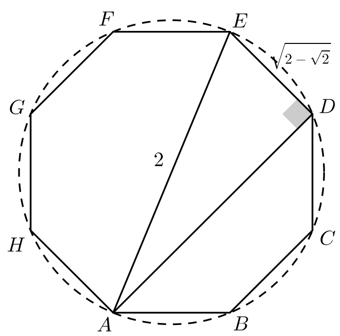
Les set distàncies que convé conèixer són: $AB = AH$, $AC = AG$, $AD = AF$ i AE.
És clar que $AE = 2$ perquè és un diàmetre del cercle circumscrit l'octàgon. Per determinar AC mirem el triangle rectangle isòsceles AOC (O és el centre de l'octógon). Pel teorema de Pitàgores, $AC^2 = 1 + 1$ i, doncs $AC = \sqrt{2}$.





Per determinar AB, el costat de l'octàgon, podem aplicar el terorema de Pitàgores en el triangle rectangle AMB. Obtindrem que $AB^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2$, d'on resulta $AB = \sqrt{2 - sqrt2}$. Aleshores ens podem fixar en el triangle rectangle ADE (rectangle en D perquè és un angle inscrit que abasta mitja circumferència). Si hi apliquem el teorema de Pitàgores obtenim que $AD^2 = 2^2 - (2 - \sqrt{2})$ i per tant $AD = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.





Vistes les set distàncies trobarem sense cap complicació que
$(AB \cdot AH) \cdot (AC \cdot AG) \cdot (AD \cdot AF) \cdot AE = 2 \cdot (2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2}) \cdot 2 = 8.$