49a Olimpíada Matemàtica.
Concurs Telemàtic SCM.

Problema 2. Problema de 3 punts

Enunciat.
Trobeu tots els nombres naturals de 4 xifres que tenen la propietat que el seu quadrat acaba en les mateixes quatre xifres (escrites en el mateix ordre que en el nombre inicial.)

Una proposta de solució.

Busquem un nombre m, $1000 \leq m \leq 9999$ que compleixi que les quatre darreres xifres de m^2 siguin les mateixes que les de m.
Això traduït a una equació vol dir que ha d'existir un nombre x que compleixi $m^2 = 10000x + m$.
D'aquí trobem $m^2 - m = 10000x$, és a dir $m(m-1) = 10000x = 2^4 \cdot 5^4 \cdot x$, però com que m i $m-1$ són primers entre ells, de l'anterior igualtat es dedueix que ha de ser
o bé
$m =$ múltiple de 5^4 i $m - 1 =$ múltiple de 2^4 és a dir $m = 625k = 16f + 1$.
Aïllo f i trobo $f = (625k-1)/16 = 39k + (k-1)/16$, amb solucions possibles a priori perquè f sigui enter $k = 1$ (no vàlid per al problema perquè m seria de 3 xifres) o $k = 17,\ 33,\ 49...$, que tampoc no són vàlids perquè m ja seria de 5 xifres o més.
o bé
$m =$ múltiple de 2^4 i $m-1 =$ múltiple de 5^4 és a dir $m = 625k+1 = 16f$. Aïllo f i ara trobo $f = (625k + 1)/16 = 39k + (k + 1)/16$. Examino les solucions possibles perquè f sigui enter i trobo $k = 15$ que ens dóna $m = 9376$. Altres possibles solucions de k vàlides a priori ja ens donen nombres de més de quatre xifres.

L'únic nombre que compleix l'enunciat és el 9376.
