48a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM

Una proposta de solució per al problema 9

Donat el polinomi $f(X) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ sabem que per als nombres enters diferents a, b, c, d es compleix $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$.

Això ens diu que a, b, c, d són arrels del polinomi $g(x) = f(x) - 5$ i, per tant,

$$g(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) \cdot h(x).$$

Per la regla de Ruffini podem deduir que h(x) serà un polinomi de grau $n - 4$, amb el terme de grau màxim x^{n-4} i amb tots els coeficients nombres enters.

Podem, doncs, escriure $f(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) \cdot h(x) + 5$ i, aleshores, si volem resoldre $f(x) = 8$ això equival a resoldre $(x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) \cdot h(x) = 3$.

Com que $h(x)$ té coeficients enters, i com que a, b, c, d són diferents una solució entera d'aquesta equació ens portaria a una descomposició del número 3 com a producte de cinc factors enters, quatre d'ells diferents, cosa que és del tot impossible perquè 3 és un nombre primer.
