48a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM

Enunciat i una proposta de solució per al problema 8

En el desenvolupament de l'activitat aquest problema es plantejava amb dades que depenien de la contrasenya. En cada cas es proposaven dos apartats, uns dels quals tenia solucions i l'altre no en tenia cap. Tot seguit s'enuncia i es resol en general.

Enunciat.
Quins són tots els enters positius N amb dígit inicial d (escrits en base 10), que compleixen la propietat que l'enter obtingut suprimint aquest d és $\dfrac{1}{a}$ del nombre original?

Solució.
Si el nombre $N = d...$ té $n+1$ xifres el podrem escriure com $N = d \cdot 10^n + M$ on M és el nombre que resulta de suprimir el d inicial.
S'ha de complir, doncs, $M = \dfrac{d \cdot 10^n + M}{a}$, d'on operant i aillant M es dedueix que ha de ser $M = \dfrac{d \cdot 10^n}{a-1}$. Aleshores:

I) En un dels apartats l'enunciat donava dos nombres d i a amb la propietat que d i $a-1$ eren primers entre ells i els mateix succeïa amb $a-1$ i 10. En aquest cas el problema no té solució.

II) Per a cada participant en l'altre apartat es donaven dos nombres d i a talment $\dfrac{d}{a-1} = \dfrac{1}{4}$. Aleshores s'observa que M ha de ser $M = \dfrac{10^n}{4}$ per a valors de $n = 2, 3, 4, \cdots$ és a dir $M \in \{25, 250, 2500, 25000, ...\}$ i, per tant, $N \in \{d25, d250, d2500, d25000, ...\}$, és a dir $N = d25 \cdot 10^k$ per a tots els valors de k enters positius o zero.
