48a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM

Una proposta de solució per al problema 6

Resoldrem l'equació amb lletres, de forma teòrica (per indicar els càlculs de forma general).

Comencem per canviar l'equació de signe i obtenim:

$$Ax^4 - Bx^2 + Cy^2 + Dz^2 + Exy + Fyz + 81 = 0$$

per a valors positius de A, B, C i D. En les equacions plantejades es donava el cas que A, D eren quadrats perfectes d'un nombre enter, que escriurem, respectivament $A = a^2, D = d^2$.

Usarem la tècnica que es coneix com a completació de quadrats. En primer lloc ho farem amb el terme en x^4 i el terme independent de l'expressió anterior, "compensant" convenientment el terme en x^2. També es podria començar amb els termes en z^2 i zy i compensar el terme en y^2. Obtenim:

$$(ax^2 - 9)^2 + b^2x^2 + Exy + Cy^2 + d^2z^2 + Fyz = 0$$

on $b^2 = -B + 18a$ que, per a tots els models, era un nombre positiu, quadrat perfecte d'un nombre enter b.

Ara completem un quadrat amb els termes en x^2, y^2 i xy. Si posem $m = \dfrac{E}{2b}$ Arribarem a:

$$(ax^2 - 9)^2 + (bx + my)^2 + c^2y^2 + d^2z^2 + Fyz = 0$$

on hem posat $C - m^2 = c^2$ perquè amb els coeficients donats resulta ser un quadrat perfecte d'un nombre natural.

Finalment es podia observar per cadascuna de les equacions plantejades que els termes en y^2, z^2 i en zy definien el quadrat perfecte d'un binomi perquè $F = \pm 2cd$.

Així doncs l'equació es transformava en

$$(ax^2 - 9)^2 + (bx + my)^2 + (cy \pm dz)^2 = 0$$

Perquè es compleixi la igualtat cadascun dels tres paréntesis ha de ser 0. Del primer parèntesis trobem dos possibles valors de x, cadascun dels quals ens dóna un valor per a y en el segon parèntesis i aquest ens dóna un valor per a z en el tercer parèntesis. L'equació donada té, doncs, dues solucions, que hem pogut calcular exactament.
