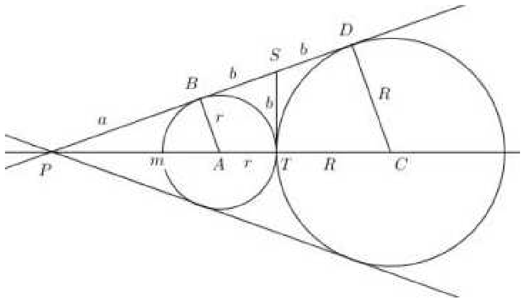
48a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM

Una proposta de solució per al problema 5

En la figura s'han indicat els radis coneguts r, R i s'ha fet notar que, per la propietat de les tangents, hi ha tres segments de la mateixa longitud (indicats amb b).



Els triangles ABP, STP i CDP són tres triangles semblants perquè són rectangles i tenen un angle agut comú.

Per la semblança entre ABP i STR tenim $\dfrac{a+b}{m} = \dfrac{b}{r}$ d'on trobem que $b = \dfrac{r \cdot a}{m-r} = \dfrac{r\sqrt{m^2-r^2}}{m-r}$.

L'àrea demanada és el doble de l'àrea del triangle STP, és a dir

$A = b(m+r) = \dfrac{r\sqrt{m^2-r^2}}{m-r} \cdot (m+r) = ... = r(m+r)\dfrac{\sqrt{m+r}}{\sqrt{m-r}}$.

Per la semblança entre CDP i ABP tenim: $\dfrac{m+r+R}{m} = \dfrac{R}{r}$ d'on podem aillar m i trobem $m = \dfrac{r^2+Rr}{R-r}$ i d'aquí $m+r = \dfrac{2Rr}{R-r}$ i $m-r = \dfrac{2r^2}{R-r}$.

Si susbtituïm aquests valors en l'expressió de l'àrea A i simplifiquem arribem a $A = \dfrac{2Rr\sqrt{Rr}}{R-r}$.
