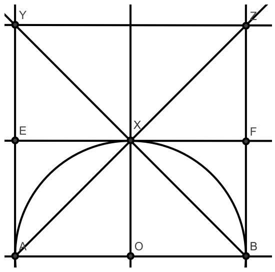
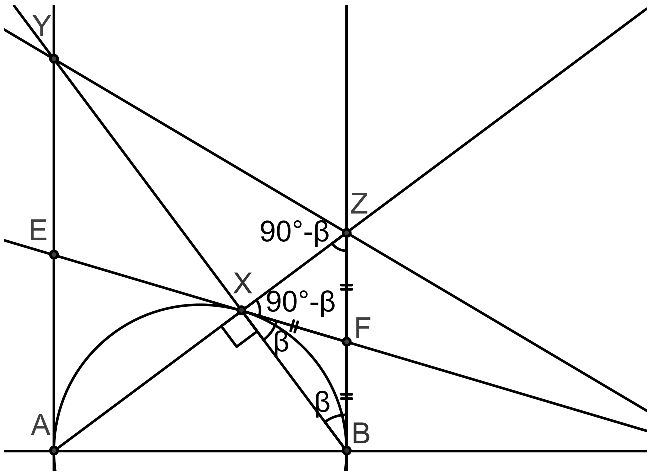
48a Olimpíada Matemàtica. Concurs Telemàtic SCM

Una proposta de solució per al problema 10

En cas que X sigui l'extrem del diàmetre perpendicular a AB les tres rectes de l'enunciat són paral·leles, com es demostra fàcilment, a partir del fet que la tangent és perpendicular al radi i que els dos triangles rectangles AZB i BYA són iguals.



Altrament veurem que les rectes indicades a l'enunciat són concurrents.



Les rectes AZ i BY són perpendiculars perquè l'angle que formen en X és un angle inscrit que abraça mitja circumferència.

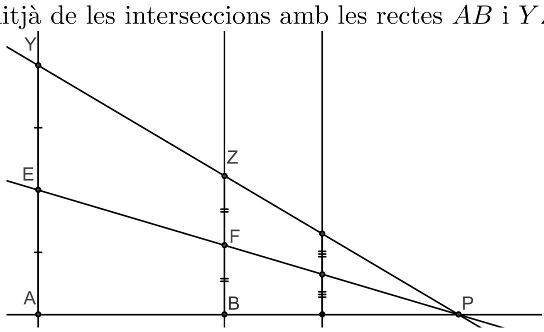
El triangle XFB és isòsceles perquè els dos segments XF i FB corresponen als segments de les tangents des del punt F a la circumferència del problema i, per tant, són iguals. Indiquem com β els dos angles iguals d'aquest triangle.

Els dos angles assenyalats en el triangle XZF són iguals a $90° - \beta$; un és el complementari de l'angle β en X; l'altre és un angle agut del triangle rectangle BXZ del qual l'altre angle agut és β.

Es dedueix que els segments BF, XF i FZ són iguals i, per tant, F és el punt mitjà de BZ.

Semblantment veuríem que E és el punt mitjà de AY.

El teorema de Tales ens permet assegurar que les rectes AB, YZ i EF (la tangent pel punt X) són concurrents, perquè ens diu que per qualsevol paral·lela que fem a les rectes AY i BZ, la intersecció d'aquesta recta amb la recta EF és el punt mitjà de les interseccions amb les rectes AB i YZ.



Per tant, si P és el punt d'intersecció de AB i EF, també ha de ser el punt d'intersecció de EF i YZ.