

Mataró de problemes 2013. creamat/FEEMCAT/SCM

Enunciat i una proposta de solució per al problema 9

Enunciat.

Tres pintors han de pintar 100 cubs idèntics i poden treballar tots tres simultàniament. Cada cara d'un cub l'ha de pintar completament el mateix pintor i triga 10 segons. Diferents cares d'un mateix cub poden ser pintades per diferents pintors, però no alhora; és a dir que al mateix temps, en un cub, només pot treballar un pintor. Quan un pintor ha de deixar un cub i passar a un altre, en això triga 1 segon; tanmateix si no ha de canviar de cub, immediatament que acaba una cara pot començar a pintar-ne una altra. Quin és el mínim temps que caldrà a l'equip de pintors per acabar la tasca de pintar els 100 cubs?

Nota: A partir de dues consultes al fòrum obert a la web amb aquesta finalitat es va aclarir que un pintor "no gasta" temps en passar d'una cara d'un cub a una altra cara del mateix cub i que el temps comença a comptar en el moment en què es comencen a pintar cubs (no "es gasta" temps per anar a la primera cara del primer cub) i s'acaba de comptar just en el moment que es pinta la darrera cara del darrer cub.

Resposta: 2033.

És clar que convé que els tres pintors treballin alhora el màxim temps possible.

La primera idea, a saber que cadascun dels 3 pintors pinti completament 33 cubs, no és la millor manera perquè en el darrer cub que queda només podria treballar-hi un pintor. Fet així el temps seria $33 \times 60 + 32$ (els temps de pintar els 33 cubs més els canvis de cub) més $1 + 60$ per anar al darrer cub i pintar-lo. Això són 2073 segons.

El temps mínim s'obté fent que cadascun dels tres pintors pinti completament 32 cubs (temps necessari $32 \times 60 + 31$) i que els quatre cubs restants es reparteixin de manera que cada pintor pinti 8 cares amb un màxim d'un desplaçament. Això es pot aconseguir, per exemple, fent que el primer pintor s'ocupi del primer cub i dues cares del segon; que el segon pintor s'ocupi de quatre cares del segon cub i quatre del tercer i que el tercer pintor s'encarregui de dues cares del tercer cub i tot el quart. Per aquesta fase el temps necessari, comptant el segon inicial per anar del cub que estaven al cub d'aquests 4 que cadascú pintarà primer és de $1 + 80 + 1$. Així el temps total serà de $32 \times 60 + 31 + 1 + 80 + 1 = 2033$.

Podem assegurar que així hem aconseguit el temps mínim perquè per pintar 100 cubs i fer 97 desplaçaments calen $6 \times 10 \times 100 + 97 = 6097$ segons. Suposant que tots tres pintors estiguin treballant alhora això representa un mínim de $\frac{6097}{3}$ segons, cosa que supera els 2032 segons i, per tant, ens porta a 2033, que és el que hem aconseguit.
