

Mataró de problemes 2013. creamat/FEEMCAT/SCM

Enunciat i una proposta de solució per al problema 11

Enunciat.

Un quadrat inicial, de costat n cm (essent n un nombre enter), s'ha descompost exactament en 2013 quadrats unitaris, cadascun de costat 1 cm, i un quadrat de costat k cm (k ha de ser un nombre enter).

- Quants valors diferents pot tenir el nombre n ?
- Quin és el mínim valor que pot tenir l'àrea del quadrat inicial?
- Per als valors de n i de k que corresponen a la mínima àrea possible del quadrat inicial, quantes maneres diferents hi ha de compondre el trencaclosques que consisteix en construir el quadrat de costat n amb el quadrat de costat k i 2013 quadrats unitaris?

Nota: dues construccions es consideraran la mateixa si es pot passar d'una a l'altra mitjançant girs o simetries.

Comentari previ: Hi va haver un debat en el fòrum de l'activitat que va fer que s'indiqués explícitament a l'enunciat que n i k havien de ser nombres enters. Tanmateix, si pensem en la construcció geomètrica, el "trencaclosques" que diu la part final de l'enunciat es pot demostrar que per compondre un quadrat amb 2013 quadrats unitaris i un altre quadrat, tots aquests 2015 quadrats han de tenir el costat de longitud entera.

Resposta: 4 valors diferents; l'àrea mínima és 2209.

A partir de l'enunciat s'ha de complir $n^2 = 2013 + k^2$, és a dir $n^2 - k^2 = (n - k) \cdot (n + k) = 2013$. Si examinem la llista de parelles $\{a, b\}$, de divisors de 2013, a saber, $\{1, 2013\}$, $\{3, 671\}$, $\{11, 183\}$, $\{33, 61\}$ i en cada cas plantejem i resollem el sistema format per les equacions $n - k = a$ i $n + k = b$ obtenim com a solucions possibles $n = 1007, k = 1006$, $n = 337, k = 334$, $n = 97, k = 86$, $n = 47, k = 14$ i és clar que aquesta última és la que correspon a la mínima àrea del quadrat inicial, a saber $47^2 = 2209$.

Qüestió suplementària: 153 maneres

El problema plantejat és equivalent al recompte de quantes posicions pot tenir un quadrat de costat 14 a l'interior (o possiblement tocant als costats) d'un quadrat de costat 47, amb els costats de tots dos quadrats paral·lels i de manera que les distàncies dels vèrtexs del quadrat de 14 als costats del quadrat de 47 siguin sempre nombres enters (perquè resulten de sumar les longituds d'uns quants quadrats unitaris).

A partir de qualsevol posició del quadrat de 14, mitjançant un gir o una simetria podem trobar-ne una altra en què el costat del quadrat $ABCD$ més proper als vèrtexs del quadrat de 14 sigui AB i el segon (possiblement a la mateixa distància que l'anterior) sigui AD . Amb les lletres de la figura tenim $d + 14 + d' = 47$ o sigui $d + d' = 33$ i com que pel que hem dit $d < d'$ resulta que $d \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Semblantment deduiríem que $m \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Com que, tal com hem situat el quadrat de 14 respecte el quadrat de 47, és $d \leq m$, el nombre de possibles eleccions per a la parella (d, m) és de $17 + 16 + 15 + \dots + 1 = 153$.

