Mataró de problemes 2012. creamat/FEEMCAT/SCM

Solució del problema 12

Representarem les sis xifres que apareixen en cada número com a, a, a, a, b, b.
Per tal d'estudiar quants esquemes diferents hi ha per col·locar aquestes lletres pensarem de quantes maneres es poden posar dues b en 6 llocs, que són les combinacions de 6 elements agafats de 2 en 2, $\binom{6}{2} = 15$.
Per cada un d'aquests 15 esquemes analitzarem si el nombre resultant és o no múltiple de 11, amb el corresponent criteri de divisibilitat. Per fer-ho agruparem els esquemes segons que les dues b estiguin en llocs de la mateixa paritat o de diferent.

- En llocs de diferent paritat:

Els esquemes corresponents són *aaaabb*, *aabaab*, *baaaab*, *aaabba*, *abaaba*, *aabbaa*, *baabaa*, *abbaaa*, *bbaaaa*. Per cadascun d'ells la suma de les xifres de lloc parell és $2a + b$ i la suma de les xifres de lloc imparell també és, exactament $2a + b$. Si apliquem el criteri de divisibilitat per 11 concloem que els nombres que corresponen a aquests esquemes són tots ells múltiples de 11. En alguns casos podem escriure de manera ben general el quocient $\dfrac{aaaabb}{11} = a0a0b$, $\dfrac{aabbaa}{11} = a0b0a$, $\dfrac{bbaaaa}{11} = b0a0a$; en els altres casos el quocient pot tenir formes diferents segons les xifres que apareguin.
Per a cadascun d'aquests nou esquemes podem donar 9 valors diferents a la primera xifra (no pot ser el 0) i 9 valors diferents a l'altra (les altres 8 xifres diferents de 0 i el 0). En total, doncs, 81 números per cada esquema i, com que hi ha 9 esquemes vàlids, $9 \times 81 = 729$ números múltiples de 11 entre els que indica l'enunciat.

- Les dues b en llocs parells:

aaabab, *abaaab*, *ababaa*. La suma de les xifres de lloc parell és $3a$ i la de les xifres de lloc imparell és $a + 2b$. La diferència entre aquests dos valors és $2a - 2b = 2(a - b)$ que, essent a i b xifres d'un nombre escrit en base 10, només pot ser múltiple de 11 si $a = b$, però això no correspon a l'enunciat perquè aleshores es tractaria d'un nombre de 6 xifres iguals.

- Les dues b en llocs imparells:

aababa, *baaaba*, *babaaa*. Raonaríem de la mateixa manera que ho acabem de fer per veure que aquests esquemes no donen cap nombre múltuiple de 11.
