Mataró de problemes 2012. creamat/FEEMCAT/SCM

Una proposta de solució raonada per al problema 9, amb ampliació

Si pensem que $N = xyz$ és un nombre de tres xifres diferents, hi ha sis ordenacions possibles de les xifres, que són xyz,xzy, yxz, yzx, zxy i zyx. La suma d'aquests sis nombres és $111 \cdot 2 \cdot (x+y+z)$ i, dividint per 6, veiem que la mitjana n'és $37(x+y+z)$. Si ha de ser $37(x+y+z) = 10k$ tindrem que s'ha de complir $x+y+z = \dfrac{10k}{37}$. Com que aquest resultat ha de ser un nombre enter, necessàriament k ha de ser un múltiple de 37 que, als efectes del problema, on $x+y+z$ és la suma de tres nombres de l'1 al 9 només pot ser 37 o 74 i aleshores l'enunciat es compleix per als nombres $N = xyz$ que tenen la suma de les seves xifres igual a 10 o igual a 20. El més petit d'aquests nombres és el 127.

Si pensem que $N = xxy$ és un nombre amb una xifra repetida, hi ha tres ordenacions possibles de les xifres, que són xxy,xyx i yxx. La suma d'aquests tres nombres és $111(2x+y)$ i, dividint per 3, veiem que la mitjana n'és $37(2x+y)$. Exactament igual que abans, raonaríem que $2x+y$, la suma de les tres xifres del nombre, ha de ser 10 o 20.
El més petit d'aquests nombres és el 118.

És clar que no hi ha cap nombre de tres xifres iguals $N = xxx$ que compleixi l'enunciat. Tampoc no hi ha cap d'aquests nombres que les seves xifres sumin 10 o 20.

Amb el raonament anterior podem contestar la pregunta següent, ampliada respecte l'enunciat:
Quins són tots els nombres naturals N de tres xifres, totes diferents de 0, amb la propietat que la mitjana dels nombres que es poden formar per reordenació de les xifres de N (inclòs N) sigui un nombre acabat en 0.
La resposta és: tots els nombres que la suma de les seves xifres sigui 10 o sigui 20.
