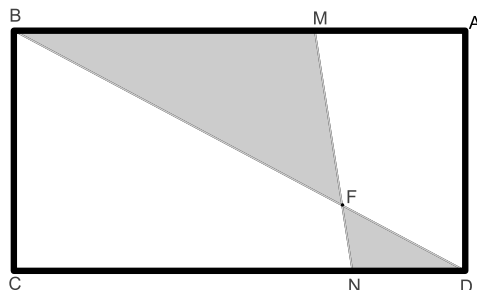


Mataró de problemes 2012. creamat/FEEMCAT/SCM

Enunciat i una proposta de solució per al problema 7

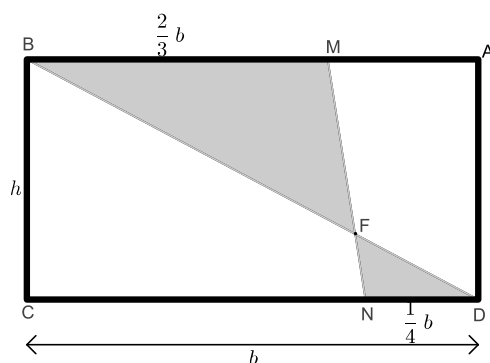
Enunciat.



La bandera de la figura s'ha dissenyat en un rectangle $ABCD$ de manera que la distància AM és igual a un terç del costat llarg del rectangle i la distància CN és igual a tres quarts del costat llarg del rectangle. Quina fracció de l'àrea de la bandera està ombrada?

Solució.

Direm F al punt on es tallen les rectes que defineixen els triangles ratllats i b, h la base i l'altura de la bandera.



Els dos triangles FMB i FND són semblants perquè tenen els tres angles iguals: l'angle en F per angles oposats pel vèrtex; l'angle en M d'un i l'angle en N de l'altre per angles alterns interns entre paral·leles tallades per una secant i semblantment per a l'angle en B d'un triangle i l'angle en D de l'altre.

La raó de semblança entre aquests triangles és

$$k = \frac{\frac{2}{3}b}{\frac{1}{4}b} = \frac{8}{3}$$

Aquesta mateixa serà la relació entre les altures dels dos triangles; pensarem en les altures des de F perpendiculars al costat llarg del rectangle. Per això, si indiquem com a_1 l'altura del triangle FND , aleshores l'altura a_2 del triangle FMB serà $a_2 = \frac{8}{3}a_1$ i es compleix que la suma d'aquestes dues altures és l'altura del rectangle.

$$h = a_1 + \frac{8}{3}a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{11}h, a_2 = \frac{8}{11}h$$

Vist això ja podem calcular l'àrea total ombrada, com l'àrea del triangle FND més l'àrea del triangle FMB :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{11}h \cdot \frac{1}{4}b \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{11}h \cdot \frac{2}{3}b \right) = \frac{73}{264}bh$$

és a dir $\frac{73}{264}$ de l'àrea total de la bandera.