Primera Copa Cangur. SCM

Fase final. Barcelona, 28 de maig de 2014. Propostes de solucions

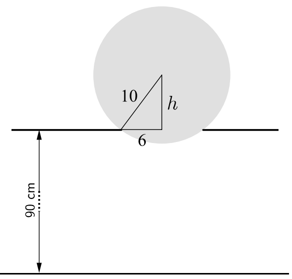
---

Problema 1. Les encaixades. Resposta: **14.**

Si un grup consta de m persones i l'altre de n i cada persona d'un grup encaixa amb cada una de l'altre en total s'hauran fet $m \cdot n$ encaixades. Si estudiem tots els divisors de 48, veurem que, de totes les possibilitats de $m \cdot n = 48$, aquella per la qual $m + n$ és mínim és la que correspon a $6 \cdot 8$. Es dedueix que el nombre més petit de persones que poden compondre la reunió és $m + n = 14$.

Problema 2. L'esfera cau al forat. Resposta: **108.**

La figura mostra un triangle rectangle en què la hipotenusa és un radi de l'esfera ($r = 10$ cm) i un catet és un radi del forat (6 cm). L'altre catet farà, doncs, $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm. Idò el punt més alt de l'esfera queda a una altura respecte el terra de $90 + h + r = 90 + 8 + 10 = 108$ cm.



Problema 3. Les boles. Resposta: **491.**

El cas més desfavorable per tenir 50 boles del mateix color es dóna quan n'hem tret 49 de cada color, és a dir un total de 490 boles. Si no passa això, en un conjunt de 490 boles segur que n'hi ha 50 o més del mateix color. Però si ha succeït, la següent bola que traguem (la 491a) serà la 50a d'un color.

Problema 4. Anem sumant. Resposta: **85.**

Si ha de ser $17 + 19 + ... + k = 1700 + k$ serà $17 + 19 + ... + (k - 2) = 1700$. Ara bé, és conegut que la suma de m nombres imparells a partir de l'1 és un quadrat perfecte, m^2 . A partir de $1 + 3 + ...15 + +17 + 19 + ... + (k - 2) = m^2$, com que $1 + 3 + ... + 15 = 64$ tindrem $64 + 1700 = 1764 = m^2$. Resulta $m = 42$ i això ens diu que per obtenir 1764 hem de sumar 42 nombres a partir de l'1. El 42è nombre imparell és $2 \cdot 42 - 1 = 83$. A partir de $k - 2 = 83$ veiem que serà $k = 85$.
Naturalment el problema també es pot fer a partir de la suma de termes d'una progressió aritmètica. Tenim $17+19+...+(k-2) = \dfrac{17 + k - 2}{2} \cdot \left(\dfrac{k - 2 - 17}{2} + 1\right) = 1700$ i si resolem aquesta equació obtenim $k = 85$.

Problema 5. Quants zeros? Resposta: **11.**

Per saber en quants zeros acaba $24^4 \times 75^3 \times 15^5$ convé tenir en compte que $24 = 3 \times 2^3$, que $75 = 3\times 5^2$ i que $15 = 3\times 5$ i, doncs, $24^4\times 75^3\times 15^5 = 3^4\times 2^{12}\times 3^3\times 5^6\times 3^5\times 5^5 = 3^{12}\times 2^{12}\times 5^{11}$ que podem escriure com $2 \times 3^{12} \times 10^{11}$, nombre que acaba en 11 zeros.

Problema 6. Amb dues xifres. Resposta: **1224.**

Nombres de cinc xifres que s'escriuen amb una sola xifra n'hi ha 9.
Mirem ara quants nombres de cinc xifres hi ha que facin servir dues xifres diferents. Triem la primera xifra, diem-ne A; per triar-la hi ha 9 possibilitats, perquè no pot ser 0.

Ha d'aparèixer una altra xifra diferent, diem-ne B; per triar-la també hi ha 9 possibilitats (no pot ser A però pot ser 0). Per escriure les altres quatre xifres hem de considerar aquestes situacions:

- Quatre B. 1 possibilitat
- Tres B i una A. 4 possibilitats
- Dues B i Dues A. $\binom{4}{2} = 6$ possibilitats per triar les posicions de la A i la B
- Una B i tres A. 4 possibilitats

En total 15 possibilitats, que ens donen un total de $15 \times 9 \times 9 = 1215$ nombres diferents. Escrits només amb una o bé amb dues xifres, com demana l'enunciat hi ha $9 + 1215 = 1224$ nombres.

Problema 7. Un eneàgon. Resposta:**136°**

La suma dels angles d'un polígon de 9 costats és $7 \times 180° = 1260°$. Si han de ser 9 nombres enters consecutius, els podem escriure (x en graus) com $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ i $x+4$. Aquests nou angles sumen $9x$. Si ha de ser $9x = 1260°$ en resulta $x = 140°$ i l'angle més petit dels nou és $x - 4 = 136°$

Problema 8. Pintem vèrtexs. Resposta: **732**

Per al vèrtex A tenim 4 possibilitats i després, successivament, per cada vèrtex tenim 3 possibilitats, els colors que no hem fet servir en el vèrtex anterior. Això ens dóna $N = 4 \times 3^5 = 972$ possibilitats però, tanmateix, hem comptat alguns casos que no compleixen l'enunciat, a saber aquells en què el vèrtex F té el mateix color que el vèrtex A.

Quants casos hi ha d'aquests? Si indiquem com a el color que hem posat en el vèrtex A (cosa que dóna 4 possibilitats) i tenint en compte que ja hem imposat que no hi pot haver dos vèrtexs AB o BC o CD o DE o EF amb el mateix color seran els casos que tot seguit estudiem. En primer lloc els que es poden representar $a \bullet a \bullet \bullet a$ on $\bullet$ indica un color diferent de a i diferent de l'anterior i s'han indicat els colors dels vèrtexs $ABCDEF$ en aquest ordre; el nombre de casos en aquesta situació, fixat el primer color és $3 \times 3 \times 2 = 18$. També pot ser $a \bullet \bullet a \bullet a$ que dóna $3 \times 2 \times 3 = 18$ possibilitats. Finalment només ens queda la situació $a \bullet \bullet \bullet \bullet a$ amb $3 \times 2^3 = 24$ possibilitats. Per tant el nombre total d'acoloriments que demana l'enunciat és $972 - 4 \times (18 + 18 + 24) = 732$.

Problema 9. Polígons encaixats. Resposta: **45**

El triangle: fa 1 regió; el seu cercle: n'afegeix 3. Fins aquí en total, comptant la regió de fora dels objectes geomètrics dibuixats, tenim $1 + 3 + 1 = 5$ regions.

El quadrat, n'afegeix 4 i el seu cercle n'afegeix 4 més; fins aquí $5 + 2 \times 4$ regions.

El pentàgon, n'afegeix 5 i el seu cercle n'afegeix 5 més; fins aquí $5 + 2 \times (4 + 5)$ regions, i així successivament, després del polígon de n costats i el seu cercle corresponent el nombre de regions és $R = 5+2\times(4+5+6+...+n)$. Si ha de ser $R \geq 2014$ en resulta $4+5+6+..+n \geq 1004,5$ i com que el primer terme és un nombre enter ha de ser $4 + 5 + 6 + .. + n > 1004$ i si ara apliquem la fórmula de la suma de termes d'una progressió aritmètica trobem que ha de ser $\dfrac{4+n}{2} \cdot (n-3) > 1004$, d'on $n^2 + n > 2020$ o sigui $n(n+1) > 2020$. Fent el càlcul trobem que, per a nombres enters, ha de ser $n \geq 45$.

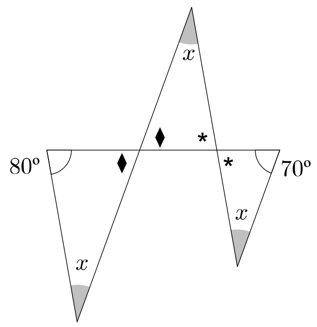
De fet, després del polígon de 44 costats i el seu cercle tenim 1973 regions i després del polígon de 45 costats ja tenim 2018 regions, que si completerm encara amb les del cercle arriben a 2063.

Problema 10. Una desigualtat. Resposta: **398**.

La desigualtat $|2014 - |x|| < 100$ equival a $-100 < 2014 - |x| < 100$.
És a dir que el nombre $2014 - |x|$ ha de pertànyer al conjunt $\{-99, -98, ..., 0, ..., 98, 99\}$, que té 199 elements. Aleshores x podrà tenir 199 valors positius (entre $2014 + 99$ i $2014 - 99$, inclosos) i 199 valors negatius (entre $-99 - 2014$ i $99 - 2014$, inclosos).

Problema 11. L'angle desconegut. Resposta: **30°**.

¿Els dos angles assenyalats amb * són iguals (oposats pel vèrtex). Els dos angles marcats amb un rombe també són iguals entre ells, per la mateixa raó. Per tant els tres triangles són semblants perquè podem assegurar, comparant-los dos a dos, que tenen dos angles iguals. Per tant els angles de tots tres triangles han de ser 70°, 80° i x. D'aquí $x = 180° - 80° - 70° = 30°$.



Problema 12. El pentàgon. Resposta: **28**

La part de pentàgon interior a l'hexàgon és $\frac{1}{6}$ de l'àrea de l'hexàgon, és a dir 12 unitats d'àrea. Cada triangle és també la sisena part de l'àrea de l'hexàgon i la part ombrejada en cada triangle n'és la tercera part. Per tant l'àrea ombrejada en cada triangle és $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ de l'àrea de l'hexàgon, o sigui 4 unitats d'àrea. Com que hi ha quatre triangles, l'àrea del pentàgon és $12 + 4 \cdot 4 = 28$ unitats d'àrea.

Problema 13. Cinc enters diferents. Resposta: **23**

Hem de trobar una descomposició en factors del nombre 18 formada per cinc factors diferents. Observem que els divisors de 18 són $\{1, 2, 3, 6, 9, -9, -6, -3, -2, -1\}$. Per obtenir 18 com a producte d'aquests factors no n'hi poden haver ni cinc ni quatre del mateix signe; passaríem de 18. Hauran de ser tres factors positius i dos negatius. Es raona ràpidament que ni el 9, ni el -9, ni el 6, ni el -6 no poden aparèixer perquè el producte seria més gran que 18. Han d'aparèixer doncs els factors positius 1, 2, 3, i per completar el producte l'única possibilitat és -3 i -1. Pot ser, doncs, $5 - a = 1$, $5 - b = 2$, $5 - c = 3$, $5 - d = -1$ i $5 - e = -3$ i es compleix $a + b + c + d + e = 4 + 3 + 2 + 6 + 8 = 23$.

Problema 14. Un múltiple de 84. Resposta: **6.**

Hem de tenir en compte que $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Sabem que $a(a+1)(a+2)$ és sempre múltiple de 3. Perquè sigui múltiple de 7 forçosament a o bé $a+1$ o bé $a+2$ hauran de ser 7 o 14 o 21; altrament no aconseguiríem obtenir el 84. El nombre a ha de pertànyer, doncs, al conjunt $\{5, 6, 7, 12, 13, 14, 19, 20, 21\}$. Finalment observem que si a és parell $a(a+1)(a+2)$ és múltiple de 4; altrament ha de ser múltiple de 4 el nombre $(a+1)$. Per tant els nombres que compleixen l'enunciat són $\{6, 7, 12, 14, 19, 20\}$.

Problema 15. Quatre rectangles. Resposta: **40**.

Si indiquem com c i $2c$ els costats dels rectangles, el triangle rectangle ombrejat a la figura té hipotenusa 20, un catet $2c$ i l'altre catet $4c$. Per tant $400 = 4c^2 + 16c^2$ i, doncs $c^2 = 20$. L'àrea de cada un dels rectangles és $A = 2c \cdot c = 2c^2 = 40$.