

Primera Copa Cangur. SCM

La Garriga, LLeida, 10 d'abril de 2014. Propostes de solucions

Problema 1

Per trobar la solució es tracta de treballar sistemàticament i ordenada.

Com que $4 \times 4 = 16$ resulta $P = 6$.

Ara hem de fer $4 \times P$ més 1 que en portem; això dona 25. Per tant $N = 5$.

Continuem: $4 \times N$ més 2 que en portem; això dona 22. Per tant $M = 2$.

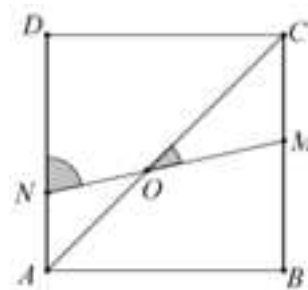
Un altre pas: $4 \times M$ més 2 que en portem; això dona 10. Per tant $L = 0$.

Finalment: $4 \times L$ més 1 que en portem; això dona 1. Per tant $K = 5$.

Efectivament $102564 \times 4 = 410256$ i la resposta demanada és $k + L + M + N + P = 1 + 0 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Problema 2

En el quadrilàter $NDCO$ coneixem l'angle $N = 80^\circ$, l'angle $D = 90^\circ$ i l'angle $C = 45^\circ$ perquè és l'angle que forma un costat del quadrat amb la diagonal. Com que els angles d'un quadrilàter sumen 360° , l'angle en O , és a dir l'angle CON fa $360^\circ - 80^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 145^\circ$ i, com que aquest és el suplementari de l'angle demanat, la resposta és $180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.



Problema 3

Si enllacem el que diu en Pere amb el que diu la Sònia (que tots dos veuen la cara blava) només poden quedar com a cares oposades a la blanca la negra o la vermella. Aleshores, si afegim el que diu la Bet, que la cara negra i la blanca tenen una aresta en comú, només pot ser que la cara oposada a la blanca sigui la vermella.

Problema 4

La descomposició en factors primers de 1664 ens dona $1664 = 2^7 \cdot 13$.

Com que només hi ha un 13, que no és múltiple de 2, aquest factor només pot intervenir en l'edat del mitjà. Idò l'edat del gran i la del jove seran potències de 2. Essent així, perquè el germà gran tingui més de 13 anys, n'ha de tenir com a mínim 16 anys i aleshores el petit en tindrà 8 i es compleix l'enunciat. Si provem si el gran pot tenir 32 anys veiem de seguida que no és possible que es compleixi l'enunciat.

Problema 5

Com que cada moneda que posem, comptant-la ella, fa que un màxim de 4 caselles compleixin la condició de l'enunciat, és clar que amb 4 monedes no ho podem fer.

Amb cinc sí que ho podem fer. Forçosament hem de començar posant una moneda en la primera columna de l'esquerra perquè, altrament, quedaria una casella de la primera columna que no compliria la condició de l'enunciat. Aleshores veiem que amb cinc monedes ho podem aconseguir posant-les, per exemple, a la primera columna primera fila, tercera columna segona fila, cinquena columna primera fila, setena columna segona fila i novena columna primera fila.

Problema 6

En un segon, quan les escales no funcionen i el senyor Cangur camina, puja $\frac{1}{90}$ de la longitud total de les escales. En un segon, quan les escales funcionen però el senyor Cangur no camina, puja $\frac{1}{60}$ de la longitud total de les escales. Per tant si les escales funcionen i el senyor Cangur camina, en 1 segon pujarà $\frac{1}{90} + \frac{1}{60} = \frac{1}{36}$ de la longitud de les escales i, doncs, trigarà 36 segons a pujar.

Problema 7

El nombre N que busquem serà el més petit quan tingui el mínim nombre de xifres i això passarà quan tingui tants 9 com sigui possible.

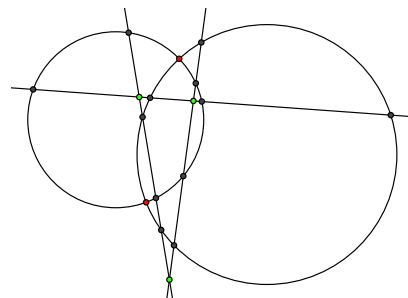
Com que la divisió de 2014 per 9 dóna 223 de quocient i de residu 7, el nombre més petit que les seves xifres sumen 2014 serà un nombre de 224 xifres, el que comença per 7 i va seguit de 223 xifres iguals a 9.

El nombre que comença 88 i va seguit de 222 xifres iguals a 9 és un altre nombre de 224 xifres que sumen 2014, però és més gran que el que hem dit abans.

I si "només" posem 221 xifres iguals a 9, no aconseguirem amb 3 xifres més arribar a una suma de 2014 i, per tant, si ho volguéssim fer així hauríem de pensar en un nombre de més xifres que el que hem dit inicialment. Seria més gran!

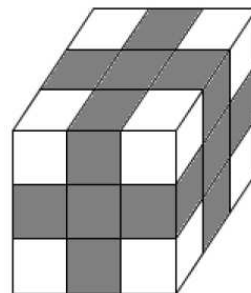
Problema 8

El màxim nombre de punts comuns entre les dues circumferències és 2. El màxim nombre de punts comuns entre dues de les tres rectes és 3, i això passarà si no n'hi ha dues que siguin paral·leles. Cada recta pot tallar cada circumferència en 2 punts; a les dues circumferències en 4 punts diferents. Això dóna en total 12 punts. En total, doncs, podem tenir $2 + 3 + 12 = 17$ punts. La figura mostra que és possible obtenir els 17 punts diferents.



Problema 9

Si ens fixem en el cub de 3×3 format pels cubs interiors al cub inicial i que queda centrat en el cub de 5×5 ens adonarem (vegeu la figura) que només hi queden sense treure els 8 cubs que estarien als vèrtexs del cub central de 3×3 . Per altra banda, dels $125 - 27 = 98$ cubs exteriors al cub inicial n'hem tret $6 \cdot 3 = 18$ i, doncs, en queden 80. En total, doncs, queden $8 + 80 = 88$ cubs després de fer l'extracció.

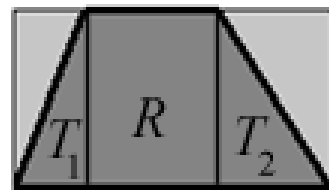


Problema 10

Si indiquem com L el costat del quadrat inicial, després de l'augment de les longituds dels costats quedarà un nou quadrat de costat $L + \frac{20}{100}L = 1.2L$. L'àrea d'aquest quadrat és $1.2L \cdot 1.2L = 1.44L^2$, que representa un augment del 44% respecte L^2 , que és l'àrea del quadrat inicial.

Problema 11

Si pels vèrtexs de la base menor del trapezi fem perpendiculars a l'altra base, el trapezi queda descompost en un rectangle R i dos triangles T_1 i T_2 , iguals als que hem retallat (vegeu la figura). Com que la base menor del trapezi és la meitat de l'altra base, que coincideix amb el costat horitzontal del rectangle, l'àrea del rectangle R serà la meitat de l'àrea del rectangle inicial.



Per tant l'àrea dels quatre triangles també és la meitat de l'àrea del rectangle inicial. La suma de les àrees dels triangles T_1 i T_2 que és igual que l'àrea total dels dos rectangles retallats és, doncs la quarta part de l'àrea del rectangle inicial i, per tant, l'àrea del trapezi equival a tres quartes parts de l'àrea del rectangle. Idò l'àrea del rectangle inicial és de 40 cm^2 i l'àrea dels triangles retallats és $40 \text{ cm}^2 - 30 \text{ cm}^2$.

Problema 12

Com que no hi ha l'1, fins a col·locar el 2014 haurem posat 2013 nombres. Com que cada fila té 3 nombres i la divisió de 2013 per 3 és exacta i dóna 671, el 2104 serà el darrer nombre de la fila 617a, és a dir que quedarà a la columna de la dreta. La fila 617a la formen els nombres 2012, 2013 i 2014.
