Primera Copa Cangur. SCM

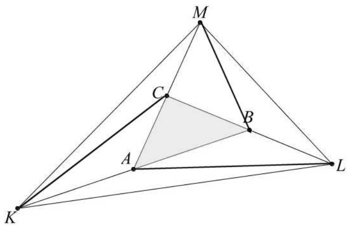
Barcelona (segon torn), 8 d'abril de 2014. Propostes de solucions

---

Problema 1
La darrera xifra de 2013^{2014} serà la mateixa que la de 3^{2014}.
Podem observar que la darrera xifra de les potències de 3 segueix aquesta cadència, de quatre en quatre: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,...
Com que 2104 dividit per 4 dóna 2 de residu això ens diu que a 3^{2014} li correspondrà la segona de els xifres que es van repetint, un 9. I a partir d'aquí deduïm que $1 + 2013^{2014}$ acaba en 0.

Problema 2
La descomposició en factors primers de 5000 és $5000 = 2^3 \cdot 5^4$. Per respondre la qüestió plantejada hem de veure quins quadrats perfectes podem trobar en aquesta descomposició, explícits o implícits. Són aquests: 1 (no oblidem que $5000 = 1^2 \cdot 5000$), 2 (perquè $5000 = 2^2 \cdot 1250$), 5 (és $5000 = 5^2 \cdot 200$), 10 (tenim $5000 = 10^2 \cdot 50$),25 (tenim $5000 = 25^2 \cdot 8$) i 50 (perquè $5000 = 50^2 \cdot 2$).

Problema 3
La figura mostra el triangle KLM descompost en set triangles. Es pot veure que tots aquests triangles tenen la mateixa àrea, que és la del triangle ABC i, per tant, l'àrea de KLM és 7.



L'àrea de ABC és la mateixa que la de BMC perquè tenen la mateixa base $AC = CM$ i la mateixa altura, la distància de B a la recta AM. Idò l'àrea de BMC és 1.
L'àrea de BMC és la mateixa que la de BLM perquè tenen la mateixa base $CB = BL$ i la mateixa altura, la distància de M a la recta CL. Per tant l'àrea de BLM també és 1.
Anàlogament podríem veure que l'àrea dels altres quatre triangles també és 1.

Problema 4
Hem de trobar $31 = a + b + c + d + e$ amb $a < b < c < d < e$ i $e = 3a$.
No ho podem aconseguir amb $a = 1$ ni amb $a = 2$.
Amb $a = 3$ i $e = 9$ podem fer, agrupant els del segon i tercer any així: $31 = 3 + (11) + 8 + 9$ però no amb 7 exàmens al quart any perquè entre el segon i el tercer en faltarien 12 i no podem obtenir 12 com a suma de dos nombres enters positius diferents i més petits que 7 .
Amb $a = 4$ seria $e = 12$; només quedarien 15 exàmens per al segon, tercer i quart dia i tres nombres més grans que 4 sumen més de 15.

Problema 5
4 lloros blaus mengen entre tots 4 quilos de gra en 4 dies.
1 lloro blau menja, doncs, 1 quilo de gra en 4 dies i, per tant com que 6 dies són una vegada i mitja 4 dies, un lloro blau menja, doncs, 1,5 quilos de gra en 6 dies.
Segons l'enunciat, 1 lloro vermell menjarà 3 quilos de gra en 6 dies. Finalment, 6 lloros vermells menjaran $6 \times 3 = 18$ quilos de gra en 6 dies.

Problema 6
El meló sencer equival a 1/4 part de meló més que les 3/4 parts del meló. Això vol dir que 1/4 del meló pesa 3/4 kg i, doncs, tot el meló pesa $4 \cdot 3/4 = 3$ kg, que són 3000 g.

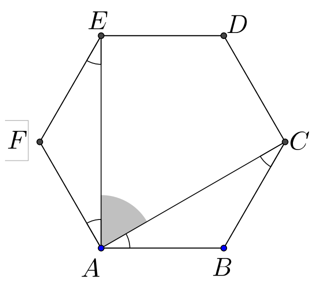
Problema 7
L'única possibilitat perquè quan fem $S+S+S$ haguem d'escriure S és que $S = 5$ (i en portem 1 cap a les desenes).
Aleshores ha de ser $D = 1$ i de les desenes cap a les centenes n'hem de portar 2.
Vist això observem que el valor més petit per a SIS l'obtindrem amb $O = 7$ i és $SIS = 525$.

Problema 8
Els volums respectius són: $V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 3r = \pi r^3$ i $V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi r^3$. És a dir que la semiesfera equival a 2/3 del con. Si el con fa 90 g la semiesfera en farà $\frac{2}{3}90 = 60$ g.

Problema 9
Nombres amb el cub d'una xifra: 2.
Nombres amb el cub de 2 xifres, 2, que fan 4 xifres del nombre llarg que escrivim.
Nombres amb el cub de 3 xifres, del 5 al 9, sòn 5 nombres que fan 15 xifres del nombre llarg.
Nombres amb el cub de 4 xifres, del 10 al 21, és a dir 12 nombres que fan 48 xifres del nombre llarg. Fins ara tenim ja $2 + 4 + 15 + 48 = 69$ xifres. Com que a partir d'aquí els cubs són nombres de cinc xifres, la xifra que interessa serà, doncs, la primera xifra de 23^3, el segon nombre que té el cub de cinc xifres. Com que $23^3 = 12167$, la xifra demanada és un 1.

Problema 10
Quan el Cangur s'adona que no podrà menjar cap més caramel és perquè ha constatat que no queden a la capsa tres caramels o més de cap color, perquè se'ls meja sempre de tres en tres. Com que 477 és un múltiple de 3, de caramels blancs no en quedarà cap; com que 478 i 523 són múltiples de 3 més 1, de verds i de grocs en quedarà un de cada; finalment, com que 536 és un múltiple de 3 més 2, de vermells en quedaran 2.
Idò en total queden $1 + 1 + 2 = 4$ caramels.

Problema 11
Cadascuna de les dues diagonals que tracem determinarà juntament amb dos costats de l'hexàgon un triangle isòsceles, a saber ABC i AEF. Com que l'angle interior d'un hexàgon regular és de 120°, cadascun dels dos angles assenyalats en aquests triangles isòsceles serà de $\frac{180° - 120°}{2} = 30°$.
Per tant l'angle demanat (en gris a la figura) és de $120° - 2 \cdot 30° = 60°$.



Problema 12
Cada cercle petit té radi la meitat del radi del cercle gran. Per tant cada cercle blanc té àrea la quarta part de l'àrea del cercle gran i, entre tots dos, tenen àrea la meitat del cercle gran . Per tant l'àrea compresa entre els dos cercles petits i el cercle gran és igual que l'àrea blanca. Com que l'àrea gris és la meitat de l'àrea que acabem d'esmentar, serà la quart apart de l'àrea del cercle gran. Per tant l'àrea del cercle gran és 4π cm^2 i, per tant el seu radi és de 2 cm.
