

Primera Copa Cangur. SCM

Les Borges del camp, Barcelona, 8 d'abril de 2014. Propostes de solucions

Problema 1

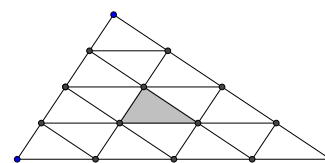
La darrera xifra de 2013^{2014} serà la mateixa que la de 3^{2014} .

Podem observar que la darrera xifra de les potències de 3 segueix aquesta cadència, de quatre en quatre: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1,...

Com que 2104 dividit per 4 dóna 2 de residu això ens diu que a 3^{2014} li correspondrà la segona de les xifres que es van repetint, un 9.

Problema 2

Si unim els altres punts que divideixen els costats en 4 parts tal com mostra la figura, tots els segments que hem traçat són paral·lels a un costat del triangle i han quedat dibuixats 16 triangles iguals. Per tant l'àrea de cadascun d'aquest triangles, un dels quals és el triangle DEF és $\frac{240}{16} = 15$.



Problema 3

Si entre el segon i el tercer mengen 1275 nous, com que $1275 = 638 + 637$, el nombre mínim de nous que pot haver menjat l'esquirol que n'ha menjat més és 639. Per tant el que n'ha menjat menys n'haurà menjat, com a màxim, $2014 - (639 + 1275) = 100$ nous. I com que l'enunciat diu que n'ha d'haver menjat 100 o més, han de ser 100. I per tant el primer esquirol n'ha menjat justament 639.

Problema 4

3 lloros vermells mengen entre tots 3 quilos de gra en tres dies. 1 lloro vermell menja, doncs, 1 quilo de gra en 3 dies. 1 lloro vermell menja, doncs, 2 quilos de gra en 6 dies.

Segons l'enunciat, 1 lloro blau menjarà 4 quilos de gra en 6 dies. Finalment, 6 lloros blaus menjaran $6 \times 4 = 24$ quilos de gra en 6 dies.

Problema 5

La descomposició en factors primers de 2000 és $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Per respondre la qüestió plantejada hem de veure quins quadrats perfectes podem trobar en aquesta descomposició, explícits o implícits. Són aquests: 1 (no oblidem que $2000 = 1^2 \cdot 2000$), 2 (perquè $2000 = 2^2 \cdot 500$), 4 (és $2000 = 4^2 \cdot 125$), 5 (és $2000 = 5^2 \cdot 80$), 10 (tenim $2000 = 10^2 \cdot 20$) i 20 (perquè $2000 = 20^2 \cdot 5$).

Problema 6

El meló sencer equival a $1/5$ part de meló més que les $4/5$ parts del meló. Això vol dir que $1/5$ del meló pesa $4/5$ kg i, doncs, tot el meló pesa $5 \cdot 4/5 = 4$ kg, que són 4000 g.

Problema 7

L'única possibilitat perquè quan fem $S + S + S$ haguem d'escriure S és que $S = 5$ (i en portem 1 cap a les desenes). Aleshores ha de ser $D = 1$ i de les desenes cap a les centenes n'hem de portar 2. Vist això observem que pot ser $O = 9$ o bé $O = 7$ (i no pot ser $O = 8$ perquè resultaria $I = 5$ i no ho pot ser, perquè és $S = 5$). Els dos valors possibles per a SIS són, doncs, 585 i 525, que sumen 1110.

Problema 8

Per semblança de triangles, si la part de baix té altura la meitat de tot el con, el radi de la part inferior també serà la meitat del radi del con.

Els volums respectius són: $V_{tot} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ i $V_{baix} = \frac{1}{3}\pi (R/2)^2 (H/2) = V_{tot}/8$.

Com que la part de baix és la vuitena part de tot el con, si la part de baix fa 50 g, tot el con de gelat farà 400 g i la part de dalt 350 g.

Problema 9

Nombres amb el cub d'una xifra: 2.

Nombres amb el cub de 2 xifres, 2, que fan 4 xifres del nombre llarg que escrivim.

Nombres amb el cub de 3 xifres, del 5 al 9, són 5 nombres que fan 15 xifres del nombre llarg.

Nombres amb el cub de 4 xifres, del 10 al 21, és a dir 12 nombres que fan 48 xifres del nombre llarg. Fins ara tenim ja $2 + 4 + 15 + 48 = 69$ xifres. La xifra que interessa serà, doncs, la cinquena xifra de 22^3 , el primer nombre que té el cub de cinc xifres. Com que $22^3 = 10648$, la xifra demanada és un 8.

Problema 10

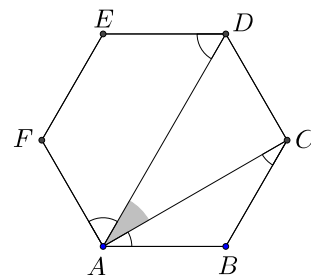
Quan el Cangur s'adona que no podrà menjar cap més caramel és perquè ha constatat que de cap color no queden a la capsa quatre caramels o més, perquè se'ls meja sempre de quatre en quatre.

Com que 477 és un múltiple de 4 més 1, de caramels blancs en quedarà 1; com que 478 és un múltiple de 4 més 2, de verds en quedaran 2; com que 523 és un múltiple de 4 més 3, de grocs en quedaran 3 i, finalment, com que 536 és un múltiple de 4, d'evermells no en quedarà cap. Idò en total queden $1 + 2 + 3 = 6$ caramels.

Problema 11

Sempre una de les dues diagonals que tracem dividirà l'hexàgon en dos trapezis isòsceles iguals. A la figura és la diagonal AD que, per tant, és la bisectriu d'un dels angles de l'hexàgon i, com que cada angle de l'hexàgon regular fa 120° , els dos angles del trapezi que toquen la diagonal són de 60° cada un.

L'altra diagonal, a la figura AC , determinarà juntament amb dos costats de l'hexàgon un triangle isòsceles. Els dos angles assenyalats en aquest triangle isòsceles seran cada un de $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.



Per tant l'angle demanat (en gris a la figura) és de $120^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Problema 12

Cada cercle blanc té radi la meitat del radi del cercle gran. Per tant cada cercle blanc té àrea la quarta part de l'àrea del cercle gran i, entre tots dos, tenen àrea la meitat del cercle gran. Per tant l'àrea grisa és igual que l'àrea blanca, l'àrea del cercle gran és $16\pi \text{ cm}^2$ i, per tant el seu radi és de 4 cm.
