Primera Copa Cangur. SCM

Girona, 7 d'abril de 2014. Propostes de solucions

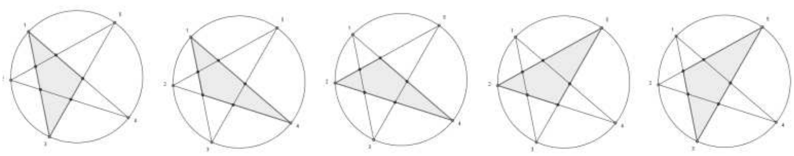
Problema 1
Quants múltiples de cinc hi ha més petits que 2104? Com que la divisió de 2014 per 5 dóna 402 de quocient i de residu 4, vol dir que en la classificació d'atletes nacionals el corredor de l'enunciat acaba en el lloc $2104 - 402 = 1712$.

Problema 2
El volum del recipient cònic de l'enunciat és $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8\ \mathrm{dm}^2$.
El volum d'un cub de 2 cm de costat és $v = 8\ \mathrm{dm}^2$. Com que $V > v$ l'aigua omplirà el cub; hi arribarà doncs a una altura de 2 dm = 20 cm.

Problema 3
Traduïm l'enunciat a equacions. Obtindrem $A = 4B$ i $(90 - B) = 4 \cdot (90 - A)$.
Si substituïm A per $4B$ en la segona equació i operem obtenim $90 - B = 360 - 16B$ d'on resulta $B = 18$.

Problema 4
Els cinc angles demanats són cinc angles inscrits a una circumferència que, entre tots, abasten 360°. Com que un angle inscrit és igual a la meitat de l'arc que abasta, els cinc angles sumaran, doncs, $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

Una manera alternativa la teniu en la figura següent.



Si sumem els angles dels cinc triangles dibuixats (és a dir $5 \cdot 180^\circ$), haurem comptat dues vegades la suma dels angles que interessen (posem $2S$) més la suma dels angles del pentàgon central (que és $3 \cdot 180^\circ$). Si $5 \cdot 180^\circ = 2S + 3 \cdot 180^\circ$ es deduiex ràpidament que $S = 180^\circ$.

Problema 5
De l'enunciat es dedueix que una gerra conté xocolata, dues cafè i dues llet.
Les dues gerres de cafè han de sumar el doble que la de xocolata. Els únics nombres de l'enunciat que compleixen això són $950 + 550 = 2 \times 750$. Per tant les gerres d ecafè són les de 950 g. i 750 g, la de xocolata la de 750 g i, doncs, les de llet són les de 475 g i 325 g, que fan un total de 800 g.

Problema 6
El valor més gran que podem imaginar, a priori, per a $DREI$ és 9876, el nombre més gran de quatre xifres amb les xifres diferents. Per aconseguir-ho hauria de ser $D = 9$, $R = 8$ i $E = 7$. Per aconseguir 9876 hauria de ser $X = 9$, cosa que no està d'acord amb l'enunciat (seria $X = D$). Per a 9875 hauria de ser $X = 8$, cosa que no pot ser perquè passaria que $X = R$. Tampoc no pot ser 9874; seria $X = 7$ i $X = E$, cosa que no es permet.
Obtenim 9873 amb $D = 9$, $R = 8$, $E = 7$, $I = 3$, $X = 6$, $O = 1$ i amb $\{N, U\} = \{2, 5\}$.

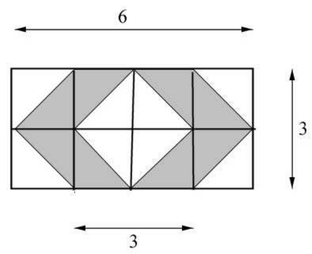
Problema 7

Si fem algunes multiplicacions de 1999 per un nombre format només per 1 veurem que (quan hi hagi més de cinc 1 en aquest segon factor) el resultat de la multiplicació és un nombre que comença amb 222, segueixen tants 1 com hi ha al nombre que multiplica menys 4, i acaba en 0889.

Per tant si multipliquem 1999 per un nombre format per 2014 xifres iguals a 1 la suma de les xifres del resultat serà $6 + 2010 \cdot 1 + 0 + 8 + 8 + 9 = 2041$.

Problema 8

La figura mostra que un rectangle de base 6 i altura 3 (i per tant d'àrea 18) es pot dividir en 16 triangles iguals, dels quals vuit estan acolorits i vuit no. L'àrea del logotip és doncs la meitat de 18, és a dir, 9 unitats d'àrea.



Problema 9

El darrer quadrat de dues xifres és el 81. Fins al quadrat de 9 hem escrit 15 xifres. Si pensem que $2^10 = 32^2 = 1024$, veurem que el nombre enter més gran que el seu quadrat té tres xifres és 31, que compleix $31^2 = 961$ i, doncs, hi ha 22 nombres enters que el seu quadrat té 3 xifres. Fins al quadrat de 31 haurem posat doncs $15 + 22 \times 3 = 81$ xifres. Fins a la xifra 100 del nombre llarg que escrivim falten, doncs 19 xifres. Amb els quadrats de 4 nombres següents (del 32 al 35), cadascun dels quals tindrà quatre xifres, arribem a 97 xifres i, per tant, la xifra 100 serà la tercera xifra del quadrat de 36. Com que $36^2 = 1296$ la resposta és 9.

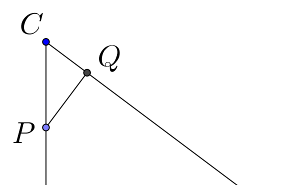
Problema 10

Com que 476, 524 i 536 són múltiples de 4, i, en canvi 478 és un múltiple de 4 més 2, i com que els caramels es mengen de quatre en quatre del mateix color, l'única manera que en poden quedar 2 al final és del color del qual hi ha 478 caramels, verds.

Problema 11

Hem d'observar que el triangle donat (que indicarem com ABC) és rectangle. La distància de P al costat més llarg (la hipotenusa del triangle donat) es trobarà fent la perpendicular. Indicarem com Q el punt en què aquesta perpendicular talla el costat BC. Aleshores els dos triangles ABC i QPC són rectangles amb un angle agut igual i, doncs, són semblants.

Per tant $\dfrac{AB}{QP} = \dfrac{BC}{PC}$, és a dir $\dfrac{8}{QP} = \dfrac{10}{3}$ i, doncs, $QP = 2,4$ dm i, com que es demanava en cm, $QP = 24$ cm.



Problema 12

Si n és el nombre de partits que es demana, amb $n-2$ partits el jugador havia fet $(n-2)\cdot 1,25$ gols. Ara n'ha fet $(n-2)\cdot 1,25+3$ que, a fi i efecte que la mitjana sigui 1,3 han de ser $n \cdot 1,3$. Si resolem l'equació $(n-2)\cdot 1,25 + 3 = n \cdot 1,3$ obtenim $n = 10$.
