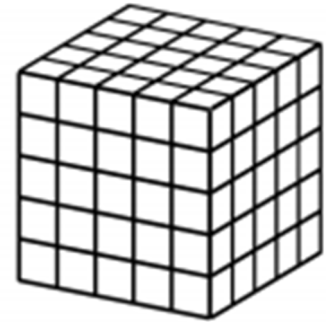


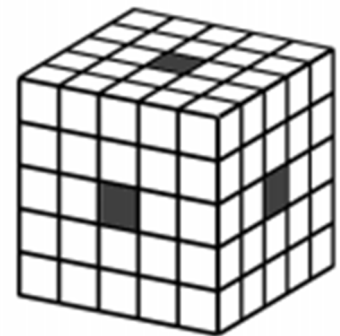
Problema 1

Tenim un cub format per $5 \times 5 \times 5$ cubs petits de $1 \times 1 \times 1$ (figura).

- A) El submergim en un pot de pintura, de manera que només queden pintades les cares exteriors del cub gran. Quants cubs petits queden amb 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6 cares pintades? Raona com ho has trobat.
- B) Si el cub fos d'una altra mida, diguem de $n \times n \times n$, quina operació hauries de fer per saber quants cubets queden amb una cara pintada?



- C) Tornem al cub $5 \times 5 \times 5$. Ara el buidem una mica: en traiem tres tires de cubs, les que van des del centre de cada cara al centre de la cara oposada (vegeu la figura). Quants cubets quedaran en el cub una vegada buidat? Si ara el tornem a submergir en el pot de pintura, quants cubs quedaran amb 2 cares pintades?

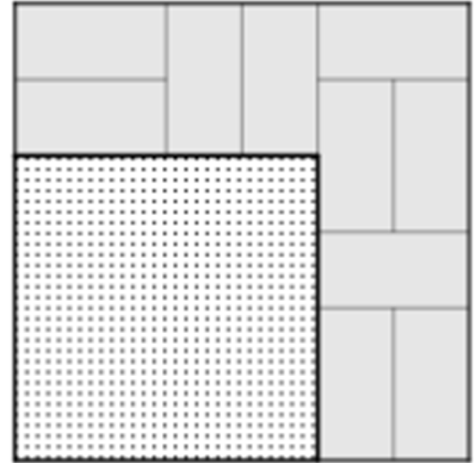
**Problema 2**

- A) Quin és el nombre més petit que podem obtenir si sumem un nombre de sis xifres i un nombre de quatre xifres de manera que entre els dos nombres fem servir les deu xifres del 0 al 9, cada una exactament una vegada?
- B) Raoneu com podem trobar un nombre de sis xifres i un nombre de quatre xifres, que entre els dos nombres fem servir les deu xifres del 0 al 9, cada una exactament una vegada, de manera que el resultat de sumar-los sigui **10#145** per a un cert valor del dígit **#** que no coneixem.
- C) Seguim utilitzant totes les xifres del 0 al 9, cada una d'elles una vegada i una sola, i amb elles escrivim dos nombres naturals de cinc xifres cadascun, de manera que si els sumem el resultat de la suma també sigui **10#145**. Podríeu trobar una propietat que ha de complir sempre el resultat de la suma i, a partir d'això, raonar quin ha de ser, en totes les possibilitats, el dígit **#** que falta?

Problema 3

En la figura, la superfície puntejada representa un quadrat de gespa de 4 m de costat en un parc i la zona gris un camí que s'ha enrajolat amb lloses de pedra de 2 m x 1 m.

- A) En la figura pots veure que es necessiten 10 lloses per a l'enrajolat. Sabries raonar per què sempre han de ser 10 lloses, col·locades adequadament?
- B) De quantes maneres diferents es poden col·locar les 10 lloses per a aconseguir enrajolar completament el camí? Raona la teva resposta.



Problema 4. Aquest problema consisteix en estudiar un joc per a dos jugadors.

- A) Tenim dues piles de fitxes sobre la taula, una amb 7 fitxes i l'altra amb 4. Dos jugadors juguen a treure fitxes i el que agafi l'última guanya la partida. A cada jugada es poden agafar totes les fitxes que es vulgui d'una de les piles (com a mínim 1 fitxa).
Quin jugador té avantatge, el primer o el segon?
Com s'ha de jugar per estar segur de poder guanyar sempre? Raona les teves respostes.
- B) Ara juguem a un joc similar a l'anterior, amb la mateixa quantitat de fitxes i amb el mateix objectiu. En aquest cas però, es poden agafar totes les fitxes que es vulgui d'una de les piles (com a mínim 1 fitxa) o també la mateixa quantitat de fitxes de les dues piles. Quin jugador té avantatge, el primer o el segon?
Com s'ha de jugar per estar segur de poder guanyar sempre? Raona les teves respostes.
- C) Ara et demanem que ho pensis per altres quantitats de fitxes. Imagina que et diuen la quantitat de fitxes de les dues piles (per cadascuna un nombre entre 1 i 10). Raona per a quins casos el segon jugador tindrà una estratègia que li permeti guanyar sempre. I el primer jugador?