ESTÍMUL TALENT MATEMÀTIC CATALUNYA

Prova de selecció. 1 de juny de 2019. Problema 1

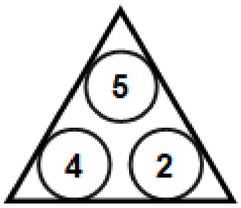
Nom i cognoms ____________________ ____________________ ______________________

1.TRICÀLCULS

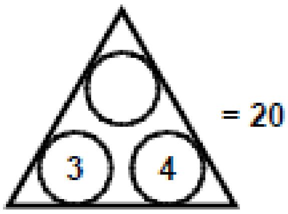
En aquest problema només es poden fer servir nombres naturals (1,2,3,4, etc.). Sobre un triangle com el del dibuix situem tres nombres en els tres cercles. A continuació, fem l'operació següent, al resultat de la qual anomenarem el ***tricàlcul*** dels tres nombres:

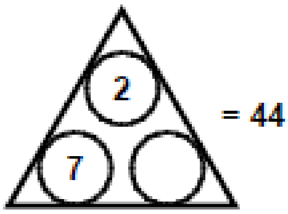
Tricàlcul = Nombre de baix a l'esquerra $\times$ Nombre de baix a la dreta $+$ Nombre de dalt

Per exemple, en el triangle de la dreta, el tricàlcul dels tres nombres serà el següent: **4 x 2 + 5 = 13.**

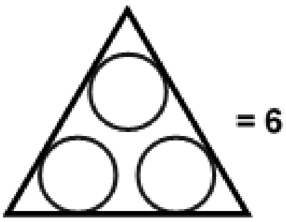


a) Completa els triangles següents perquè els tricàlculs corresponents siguin els indicats:





b) Quants triangles existeixen que el seu tricàlcul doni com a resultat 6? Dibuixa'ls.
Pensa que els nombres dels vèrtexs poden repetir-se i que dos triangles seran diferents si els seus nombres estan situats en diferents cercles, encara que siguin els mateixos nombres.



(l'enunciat del problema continua al darrere)

S'anomena ***quadrat perfecte*** un nombre que es pot expressar com el quadrat d'un nombre natural, és a dir: 1 (que és el quadrat de 1), 4 (que és el quadrat de 2, és a dir 2×2), 9, 16, 25, etc. Als quadrats perfectes fan referència els apartats c) i d) d'aquest problema

c) En Pau i la Paula practiquen amb els tricàlculs. La Paula posa a baix dos nombres consecutius (seguits) i en Pau ha d'aconseguir que el tricàlcul sigui un quadrat perfecte posant a dalt el nombre més petit possible. Dona-li una instrucció a en Pau perquè aconsegueixi sempre el seu objectiu, siguin els que siguin els nombres seguits que li ha posat la Paula i justifica-ho amb detall. (És clar que si vols pots ajudar-te amb alguns exemples però es demana una instrucció vàlida sempre.)

d) Ara en Pau posa a baix un nombre i el seu triple i la Paula ha d'aconseguir un quadrat perfecte. Dóna-li una instrucció a la Paula sobre quin nombre ha de posar a dalt perquè aconsegueixi un quadrat perfecte siguin els que siguin el nombre i el seu triple que ha posat en Pau. (Com en l'apartat c) pots ajudar-te amb alguns exemples però es demana una instrucció vàlida en general; ara no cal que el de dalt sigui el nombre més petit possible.)

e) Creus que existeixen tres nombres **diferents** que, al posar-los en qualsevol ordre en el triangle, sempre doni com a resultat el mateix tricàlcul? Raona la teva resposta.

(si et fa falta pots demanar un altre full per acabar l'explicació d'aquest o d'altres problemes)

Prova de selecció. 1 de juny de 2019. **Problema 2**

Nom i cognoms ____________________ ____________________ ______________________

2. LA IL·LUMINACIÓ DEL MUSEU CARRÉ

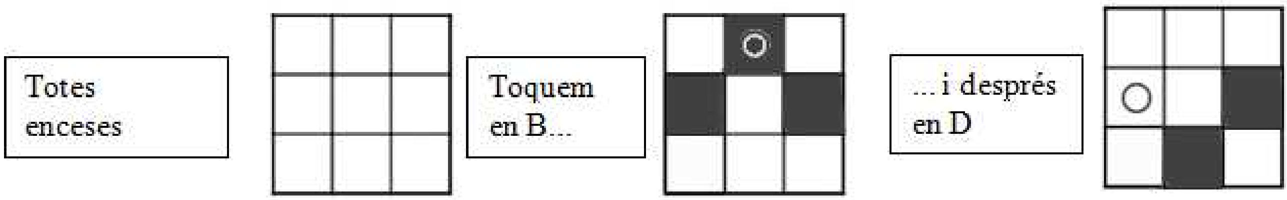
A	B	C
D	E	F
G	H	I

El museu Carré té forma de quadrat i té 9 sales quadrades iguals, A, B, C, …

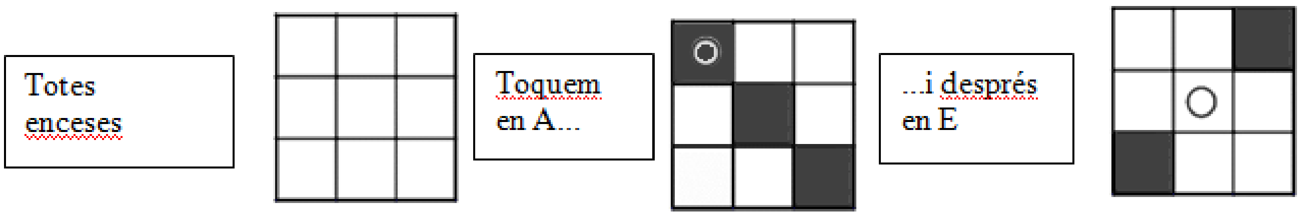
En cada una d'elles hi ha un interruptor que encén o apaga alhora el llum d'aquella sala i el de les sales que estan en diagonal amb ella.

Entendrem que "en diagonal" vol dir en paral·lel a una diagonal del quadrat, és a dir

Així si comencem amb totes les sales il·luminades i toquem l'interruptor de **B**, s'apaguen les sales B, D i F. Si a continuació toquem l'interruptor de **D**, s'encenen D i B que estaven apagades i s'apaga H que estava encesa. L'esquema de què passa amb la seqüència **B→D** és:



Amb totes les sales il·luminades, si toquem en **A** s'apaguen A, E i I. Si a continuació toquem en **E**, s'encenen A, E i I, i s'apaguen C i G. Així, la seqüència **A→E** és:



En tots els apartats del problema comencem amb totes les sales del museu il·luminades.

a) Raona què passa si toquem el mateix interruptor dues vegades seguides.

b) Si toquem dos interruptors diferents, importa l'ordre en què ho fem per saber l'estat dels llums al final? Raona la teva resposta.

(l'enunciat del problema continua al darrere)

Recorda que en tots els apartats comencem amb totes les sales del museu il·luminades i que en tota aquesta prova es valora el fet de raonar adequadament les respostes.

c) Escriu una seqüencia ordenada d’interruptors (tan curta com sigui possible) per a deixar apagades totes les sales. (En l'esquema següent pot ser que hagis de deixar quadrats en blanc si no els necessites, o bé, si et fan falta, en pots afegir de nous).

□ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □

d) Escriu una seqüencia ordenada d’interruptors (tan curta com sigui possible) per a deixar encesa només la sala central E. (Com a l'apartat anterior, en l'esquema següent pots deixar quadrats en blanc o afegir-ne de nous).

□ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □ → □

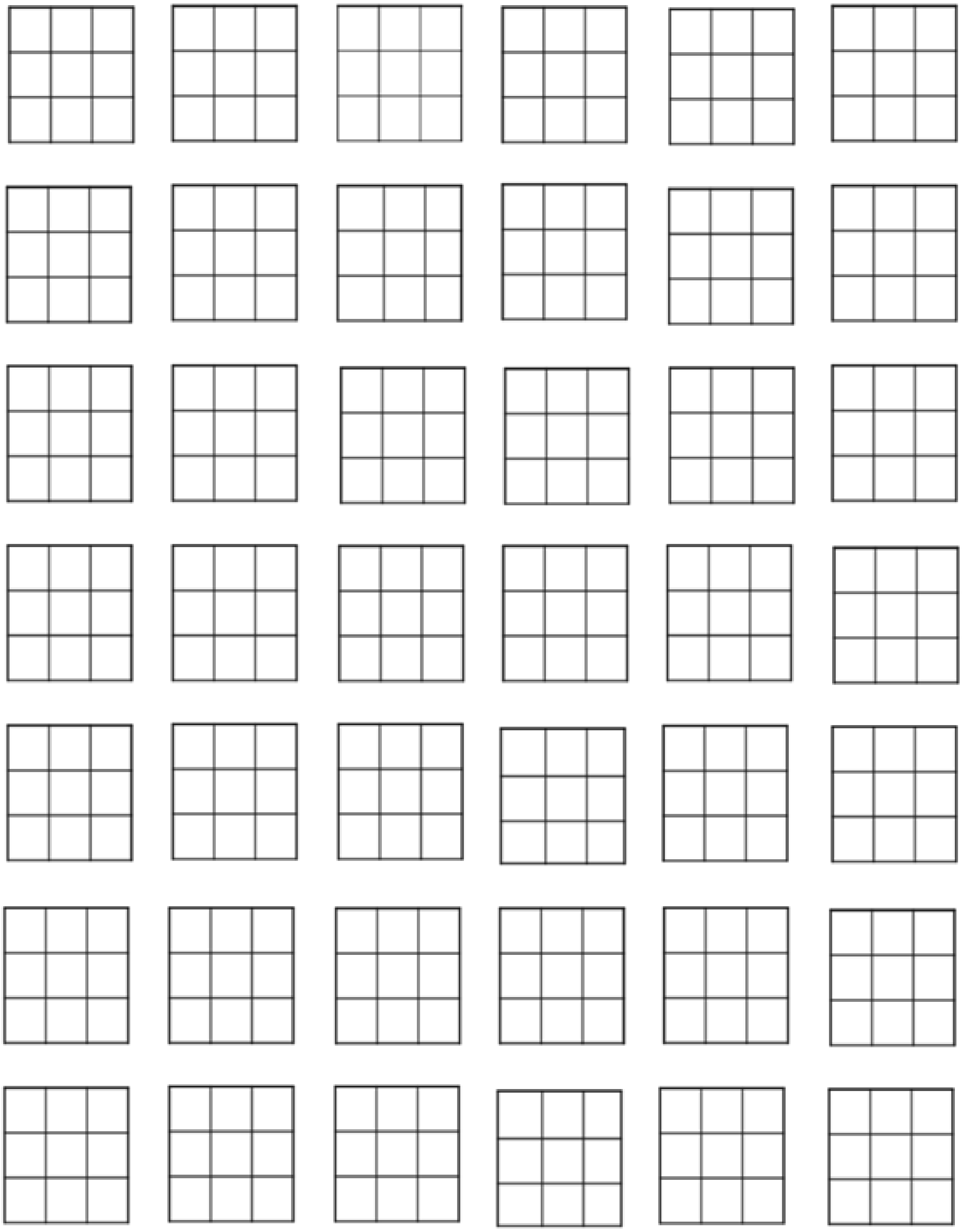
e) Indica, de manera raonada, quines sales poden acabar estant elles soles il·luminades i totes les altres apagades.

(si fas servir el full auxiliar, no t'oblidis de comentar-ho en les explicacions)

ESTímul TALent MATemàtic CATALUNYA

Prova de selecció. 1 de juny de 2019. Full auxiliar Problema 2

Nom i cognoms ______________________ ______________________ ________________________



Nom i cognoms ____________________ ____________________ ______________________

3. LES BÚSTIES I LES TARGETES

Tenim 4 bústies, dues vermelles i dues negres, fixes, sempre en la mateixa posició. Tenim també dues targetes vermelles i dues negres. Repartim les targetes en ls bústies. Una forma possible de repartir-les és

Bústia vermella	Bústia vermella	Bústia negra	Bústia negra
Targeta vermella	**Targeta negra**	**Targeta negra**	**Targeta vermella**

En aquest repartiment exactament dues bústies contenen una targeta d'igual color que la bústia. Si t'hi fixes bé veuràs que, comptant l'anterior, en total hi ha tres opcions possibles:

1. Totes les bústies contenen una targeta del seu color
2. Exactament dues bústies contenen una targeta del seu mateix color.
3. Cap bústia conté una targeta del mateix color que la bústia.

a) Quina opció és la que succeirà més cops si repartim les targetes a l'atzar? Per què?

b) Suposem ara que tenim 6 bústies (3 vermelles i 3 negres, fixes, sempre en la mateixa posició) i també 3 targetes vermelles i 3 targetes negres que es poden repartir en les bústies. Després de repartir les targetes a l'atzar, quantes bústies hi pot haver en les quals el color de la targeta que conté coincideixi amb el color de la bústia? Explica totes las possibilitats i, de totes elles, raona si n' hi ha alguna que pugui ocórrer més cops que les altres?

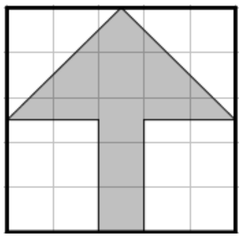
(l'enunciat del problema continua al darrere)

c) Ara suposem que tenim 30 bústies, 15 de cada color, també fixes, sempre en la mateixa posició, i també 30 targetes, 15 de cada color. Si et fem les mateixes preguntes que en l'apartat b), què contestaries?

d) Ara estudiem un cas més general. Suposem que tenim un nombre parell de bústies, la meitat vermelles i la meitat negres. Tenim la mateixa quantitat de targetes que de bústies, però les hem triat de manera que hi ha més targetes vermelles que negres. Pot passar, en aquest cas, que el nombre de bústies amb una targeta del seu mateix color sigui un nombre imparell? Justifica la teva resposta.

Nom i cognoms ____________________ ____________________ ______________________

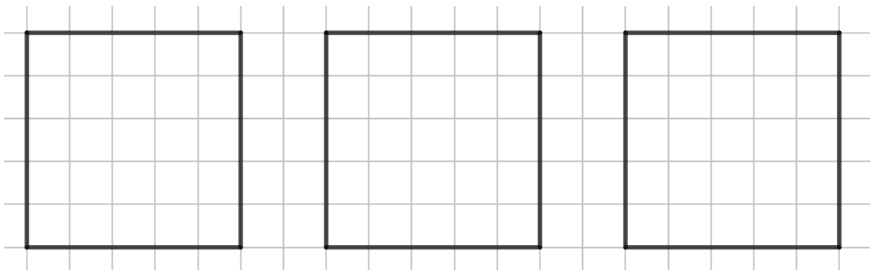
4. SUPERPOSICIÓ DE FLETXES

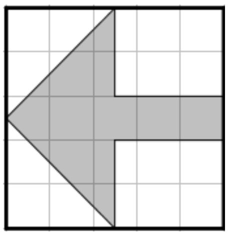


Tenim un tauler quadrat, transparent, de 5 cm x 5 cm i hi hem marcat una quadrícula en la qual cada quadradet fa 1 cm x 1 cm.

En el tauler hi hem dibuixat la fletxa ombrejada que veieu, dibuixada a escala, a la figura de la dreta. Adoneu-vos que tres vèrtexs són els punts mitjans de tres costats del tauler, que l'amplada de la tija de la fletxa és 1 cm i que és paral·lela als costats del tauler.

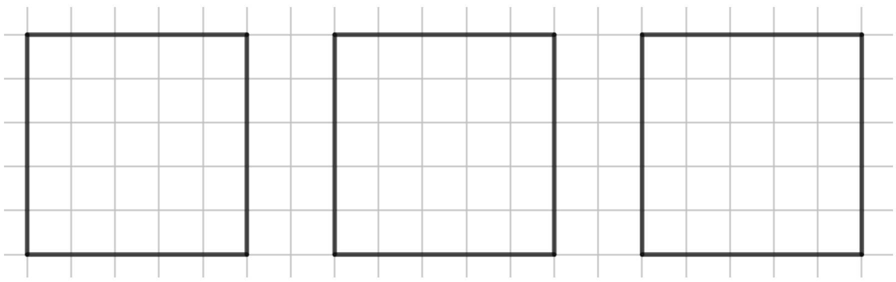
a) Quina és l'àrea de la fletxa? Explica com l'has deduït
(En cada apartat se't donen unes quadrícules de 5 x 5 per si et poden ajudar, i al darrere d'aquest full encara en tens unes altres. No vol dir pas que les hagis de fer servir totes; només les que et semblin imprescindibles per a l'explicació. És clar que un dibuix pot anar bé per explicar com fas el càlcul.)





Ara agafem una fletxa igual que l'anterior. La col·loquem girada com veieu a la figura de la dreta. Tot seguit superposem els dos taulers de vidre que tenen dibuixades les fletxes.

b) Quina és l'àrea total recoberta, en el quadrat de 5 x 5, per la figura que resulta de la superposició de les dues fletxes?



(l'enunciat del problema continua al darrere)

c) Ara, amb les dues fletxes superposades com s'ha indicat a l'apartat anterior i a la vista dels resultats dels apartats a) i b), dedueix quina és l'àrea del polígon determinat per la zona comuna a les dues fletxes?

(Tens quadrícules dibuixades per si et poden ajudar. Si les fas servir, no t'oblidis de comentar-ho en l'explicació que has d'incloure en les respostes.)