

## Problema 1. JOC AMB BOLES

Tenim una bossa **A** amb boles numerades que farem servir per a un joc:



Per a jugar, les boles es barregen i se n'agafen dues sense mirar. Després se sumen els nombres de les dues boles triades i si la suma és parell, guanyes i si és imparell, perds. Per exemple:

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} = 9, \text{ perds}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{2} = 6, \text{ guanyes}$$

Un joc com aquest es diu que és **just** si la quantitat de parelles de nombres que et fan guanyar és la mateixa que la quantitat de parelles de nombres que et fan perdre.

- a) Escribeu un raonament per a justificar si el joc amb la bossa **A** és just o no ho és.
- b) Tenim ara unes altres dues bosses, **B** i **C**, amb boles numerades.



En cada bossa per separat fes el recompte de quantes parelles de nombres pots extreure i quantes d'elles et fan guanyar (és a dir que la suma dels dos nombres sigui un nombre parell). Mira bé els teus càlculs i explica quina de les tres bosses **A**, **B** o **C** triaries perquè la teva possibilitat de guanyar sigui la major possible.

c) Creus que substituïnt una de les boles d'una de les bosses anteriors per una bola amb un altre nombre enter (el que vulguis) podries aconseguir una bossa amb boles numerades que donés lloc a un joc just? Explica la teva resposta.

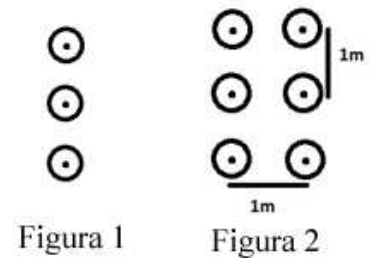
d) Estudia si és possible construir una bossa amb 7 boles numerades que doni lloc a un joc just. Explica la teva resposta.

## Problema 2. PREPARACIÓ DE LA PLANTACIÓ DE LLAVORS

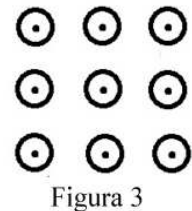
Un pagès ha de plantar llavors en un dels seus camps i avui ha de preparar el terreny. Té una màquina que pot assenyalar els forats per posar les llavors. Fa tres forats en línia recta a un metre de distància l'un de l'altre i, per fer-ho, triga un minut.

Durant el primer minut ja ha marcat tres forats per plantar-hi després les llavors, tal com es veu en la Figura 1. Durant el segon minut, la màquina torna a fer tres forats per a tres llavors, en una línia paral·lela a l'anterior a distància 1 metre, i també deixa 1 metre de distància entre centre i centre de cada nova llavor, com indica la Figura 2.

Així ho va fent cada minut i per això, just després del tercer minut, el terreny preparat per plantar llavors queda com es veu a la Figura 3, sempre amb punts a la mateixa distància.

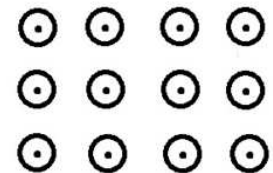


- a) Tot de cop al pagès li agafa el rampell geomètric i pensa: *¿quants quadrats podria dibuixar de manera que els punts preparats per posar les llavors en siguin els vèrtexs?* Has d'intentar respondre'l. Explica quina àrea té cadascun dels quadrats que es podrien dibuixar en la Figura 3 i raona quants se'n poden dibuixar de cada tipus.



- b) El pagès també juga a comptar i pensa: *si dibuixés tots els quadrats que es poden fer ¿de quants quadrats seria vèrtex cadascun dels punts ja marcats en el camp?* A aquest nombre li direm el **quaqua** de cada punt. Respon de manera raonada quant val el quaqua de cadascun dels nou punts, pensa raonadament quant han de sumar tots els quaqua i comprova que la suma és la que havies pensat.

- c) L'agricultor segueix fent funcionar la seva màquina i va fent forats sempre conservant les distàncies ja indicades. Després del quart minuts la preparació del camp per plantar les llavors segueix l'esquema de la Figura 4. Adona't que el camp preparat es va allargant.



Respon de manera raonada, les preguntes següents:

Quina àrea té cadascun dels quadrats que es podrien dibuixar de manera que els forats actuals en siguin els vèrtexs? N'hi ha algun de mida diferent dels del cas anterior? Raona quants quadrats es poden dibuixar de cada tipus després del quart minut, a la Fogura 4..

- d) Quin és, també en la Figura 4, el quaqua de cadascun dels forats preparats? Quant sumen tots els quaqua? Sabries donar alguna raó, abans de fer el càlcul de la suma, per pensar quin ha de ser el resultat de la suma de tots els quaqua?
- e) El pagès ha anat treballant amb la seva màquina durant una hora, és a dir 60 minuts. El camp ja serà molt allargat, 60 fileres de 3 forats cada una. Respon raonadament a les mateixes preguntes anteriors: *¿Quina àrea té cadascun dels quadrats que es podrien dibuixar de manera que els forats que hi ha en les 60 fileres en siguin els vèrtexs?* N'hi ha algun de mida diferent dels que hem vist en els casos anteriors? Raona quants quadrats es poden dibuixar, de cada tipus i en total, en aquest moment. Explica quin seria el valor dels quaqua dels diversos forats i quant sumarien tots els quaqua.

### Problema 3. EL PALAU DE LES FADES

Les fades viuen en un palau que té molts pisos numerats així: 1, 2, 3, 4, 5, ...  
(no hi ha pis 0, i tampoc no hi ha soterranis en aquest palau.)

Per anar d'un pis a un altre cal fer servir una vareta màgica i a cada pis les fades en troben dues: una és vermella i l'altre és blava. Només es pot anar d'un pis a un altre amb aquestes varetes màgiques, que són doblement màgiques perquè poden servir per a pujar i per a baixar.

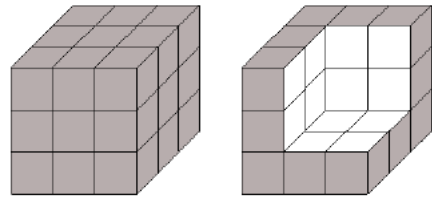
Si piques amb la vareta màgica vermella per anar amunt pugues 10 pisos i si piques per anar avall baixes 10 pisos (per poder baixar cal que estiguis més amunt del pis 10). Per exemple, si ets al pis 37 i toques la vareta vermella pots anar al pis 47 o al pis 27.

També pots tocar la vareta blava. Si la toques per anar cap amunt pujaràs al pis que té el nombre que resulta de sumar 1 al triple del nombre del pis on ets. Per exemple si ets al pis 5, amb la vareta blava pots pujar al pis  $16 = 3 \times 5 + 1$ . També pots fer servir la vareta blava per baixar, amb la condició que estiguis en un pis on hauries pogut arribar pujant amb la vareta blava, i aleshores fas el moviment contrari. Per exemple, si ets al pis 13, com que  $13 = 3 \times 4 + 1$ , podries baixar del pis 13 al pis 4..

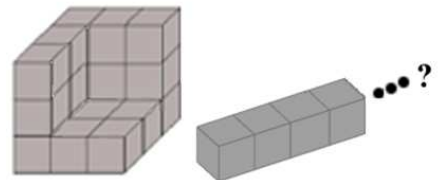
- a) Detalla tots els pisos als quals et pots moure des del pis 7 amb una sola acció d'alguna de les varetes (en direm "directament"). Escribeu també tots els pisos als quals et pots moure directament des del pis 20, i tots els pisos als quals et pots moure directament des del pis 46.
- b) La fada del Bosc viu al pis 1. Creus que podria arribar al pis 13? Podria anar al pis 40? I al pis 93? I al pis 57? Si pot arribar a un d'aquests pisos, explica quines varetes ha tocat i en quin ordre. Si creus que no pot arribar-hi, explica per què i intenta detallar, amb les teves paraules, quins són tots els pisos als quals pot arribar la fada del Bosc.
- c) La fada de la Lluna viu a la planta 2. Describeu com pot arribar la fada de la Lluna a la planta 57.
- d) La fada de l'Aigua viu al pis 18. Podria arribar al pis 5?
- e) Poden coincidir dues d'aquestes tres fades en algun pis? Si penses que **SÍ** digues el pis, quines són les fades que hi poden coincidir i com hi arribarien. Si penses que **NO** escriu una justificació.

### Problema 4. PINTANT CUBS GRANS I PETITS

- a) Hem fet servir exactament 9 pots de pintura, tots iguals, per pintar exteriorment (per totes les seves cares, també les que no es veuen a la figura, com la lateral esquerra, la del darrere i la inferior) el cub que es veu sencer a la imatge, i que, com es veu, està construït amb cubs més petits, tots iguals. Després hem tret uns quants cubs per deixar la figura com es veu a la dreta. Quants pots de pintura ens faran falta per pintar completament la part de la figura que no ho està?

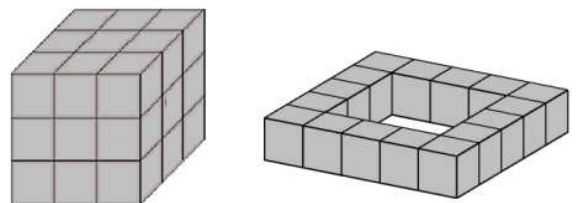


- b) Ara ja tenim aquesta figura pintada exteriorment (recordeu que també per l'esquerra, pel darrere i per sota) i podem desmuntar-la. Aleshores volem triar-ne uns quants cubs, que posarem adossats en la posició que ens vagi millor, per a construir una filera de cubs, en la qual volem pintar totes les cares que no ho estiguin.



Si tenim un sol pot de pintura com els de l'apartat a), quin és el màxim nombre de cubs que podem posar en la filera perquè puguem pintar completament les cares que no ho estaven? Explica quins cubs has triat i com els situaràs a la fila.

- c) Tenim un altre cub com l'inicial, complet i pintat exteriorment per totes les seves cares exteriors, el desmuntem i ara volem enganxar adequadament 16 cubs (alguns dels que tenen cares pintades) per a construir un nou objecte: un "quadrat de cubs" (5 cubs en cada costat; només el voltant) i pintar-ne les cares que no ho estaven, com es veu en la figura de la dreta. Volem pintar totes les cares exteriors del nou objecte, però el podem muntar de manera que aprofitem peces amb algunes cares pintades, tantes com sigui possible (que ja no tornarem a pintar, naturalment). Raona quin és el menor nombre de cares que haurem de pintar.



- d) Amb les peces que ens han sobrat volem afegir una creu al quadrat i que quedi pintada en tot el seu exterior, com mostra la figura de la dreta. També la muntarem intentant aprofitar, dels cubs que ens han quedat sense fer servir en l'apartat anterior, aquells que tinguin cares ja pintades i que puguem afegir ara a la figura. Quin és el menor nombre de cares que haurem de pintar en la creu que afegim? Explica-ho amb detall (quins cubs tries i com els poses)

