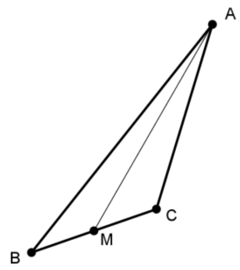
ESTÍMUL TALENT MATEMÀTIC CATALUNYA

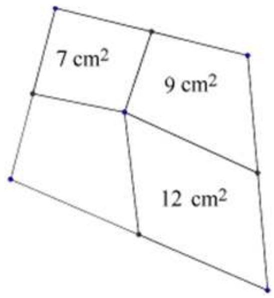
PROBLEMA 1. TRIANGLES I QUADRILÀTERS

a) En un triangle com el de la dreta, *ABC,* marquem el punt mitjà del costat *BC*, que és *M*. Aleshores dividim el triangle en uns altres dos *AMB* i *ACM*, com es pot veure a la figura. Calculem l'àrea del triangle *AMB* i ens dóna 4 cm^2. Quina és l'àrea de l'altre triangle, *ACM*?

No n'hi ha prou amb dir quin és el valor, sinó que has de justificar la teva resposta.

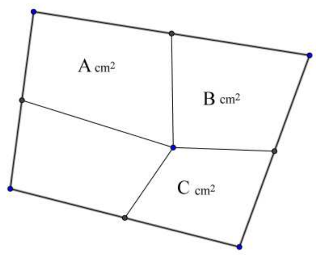


b) Considerem ara un quadrilàter com el de la figura. Si escollim en ell un punt interior i l'unim amb els punts mitjans dels quatre costats, el quadrilàter inicial queda descompost en quatre quadrilàters més petits. Si les àrees de tres dels quadrilàters més petits consecutius són 7 cm^2, 9 cm^2 i 12 cm^2, com s'indica en la figura, quina és l'àrea del quart quadrilàter d'aquesta descomposició? Com en l'apartat anterior, no n'hi ha prou amb la resposta numèrica sinó que has d'explicar-ne el per què.



Nota: Les àrees no estan dibuixades a escala. Hi pot haver diferents quadrilàters que compleixin l'enunciat. Per tant no cal que et preocupis perquè els que dibuixis en la teva explicació siguin "idèntics" al de la figura.

c) Ara et demanem que arribis a una generalització de l'apartat anterior, és a dir, que arribis a una fórmula per calcular l'àrea del quadrilàter que falta. Per fer-ho, repeteix l'apartat anterior amb un altre quadrilàter d'inici, però indicant les àrees de tres dels quadrilàters petits consecutius de la descomposició com *A*, *B* i *C* cm^2 (com s'indica a la figura). Has d'escriure una operació indicada entre *A, B* i *C* que expliqui quina creus que seria l'àrea del quart quadrilàter de la descomposició.



ESTÍMUL TALENT MATEMÀTIC
CATALUNYA

Prova de selecció. 6 de juny de 2014

PROBLEMA 2. TALLS EN UNA CORDA, EN UNA PIZZA I EN UNA SÍNDRIA

a) Si tenim un tros de corda i, amb unes tisores li fem un tall, obtenim dos trossos de corda. Si al tros de corda inicial li haguéssim fet dos talls, tindríem tres trossos; i si li féssim tres talls, tindríem quatre trossos. Amb 53 talls, quants trossos de corda obtindríem?

b) Ara tenim una pizza. Si li fem un tall de banda a banda obtindrem dues porcions de pizza. Si mantenim la pizza sobre el plat, sense separar els trossos, i tornem a fer un tall de banda a banda es poden obtenir com a màxim quatre porcions de pizza.
Ara imagina que fem tres talls de banda a banda a una pizza, i que ho fem sense separar els trossos que anem obtenint. Quantes porcions de pizza podem obtenir, com a màxim?
I si fem quatre talls en les mateixes condicions? I si fem cinc talls?

Un tall d'una pizza de banda a banda

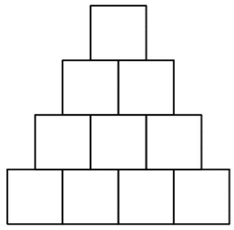
c) Per acabar, tallarem una síndria. Si amb un llarg ganivet la tallem de banda a banda, obtenim dos trossos de síndria. Si mantenim junts els dos trossos de síndria en la seva posició inicial i fem un segon tall de banda a banda, podem aconseguir com a màxim, quatre trossos de síndria.
Ara imagina que a la síndria li poguéssim fer tres talls en comptes de dos, mantenint junts en el seu lloc els trossos que anem obtenint. En quants trossos podria quedar partida la síndria, com a màxim? I amb quatre talls? I amb cinc talls?

d) Copia una taula de dades com la següent al teu full de respostes i omple-la les caselles que corresponen als resultats que has obtingut en els apartats a), b) i c).

Nombre de talls	0	1	3	4	5	6	7
Trossos de corda	1	2					
Trossos de pizza	1	2					
Trossos de síndria	1	2					

Observa molt bé les dades que has posat a la taula i explica si podries omplir les dues darreres columnes.

PROBLEMA 3. TORRES DE NOMBRES

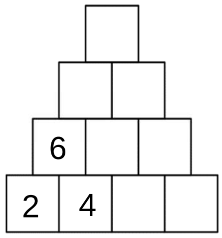


En aquest problema anomenarem *torre* una figura com la de la dreta, que està formada per quatre quadrats en la base (primer pis), en el segon pis hi ha tres quadrats, en el tercer pis, dos i al darrer pis, un.

En cada torre omplirem tots els quadradets (caselles) amb nombres d'acord amb les regles següents:

1. Es comença a omplir per la casella de l'esquerra del primer pis i s'hi escriu un nombre, el que es vulgui.
2. A continuació es completa el primer pis, d'esquerra a dreta, de manera que en cada casella s'escriu el nombre que és el doble de l'anterior.
3. Quan s'acaba d'omplir el primer pis es comença a omplir el segon, de forma que a cada casella s'escriu la suma de les dues caselles que té a sota.
4. I es segueix així amb el tercer i el quart pis fins que ja s'han completat totes les caselles de la torre.

a) A la torre que tens a continuació hem decidit que el primer nombre sigui el 2. Copia-la al full de respostes i omple totes les caselles d'acord amb les regles anteriors.



b) Suma tots els nombres que hi ha a la torre de l'apartat a) i explica si s'obté, o no, un nombre que és quadrat perfecte. (*)

c) Estudia quin és el nombre natural més petit pel qual has de començar a omplir les caselles de la torre perquè la suma de tots els nombres de la torre sigui un quadrat perfecte. Explica com ho has deduït.

d) Ara treballarem amb una torre de 5 pisos, amb cinc caselles al primer pis. Raona quin és, en aquest cas, el nombre natural més petit amb què has de començar perquè la suma de tots els nombres de la torre sigui un quadrat perfecte.

e) Amb una torre de 5 pisos es pot observar que el nombre del pis de dalt de tot és sempre una potència de base 3 multiplicada per un nombre. Quin és aquest nombre? Sabries justificar-ho?

(*) Per si no saps que és un nombre *quadrat perfecte*, et direm que el 144 és un quadrat perfecte perquè $144=12^2$, però en canvi 32 no es quadrat perfecte perquè no hi ha cap nombre natural que elevat al quadrat, és a dir multiplicat per ell mateix, sigui igual a 32.

PROBLEMA 4. JOC AMB CARTES

La Maria i en Joan estan jugant a un *joc de divisibilitat,* amb una baralla que té només deu cartes numerades del 0 al 9, que estan posades amb el nombre ben visible.
El primer que juga tria una carta i la posa a la taula amb la idea de començar a escriure un nombre de vàries xifres. Després, cada vegada que els toca el torn, han de triar una carta i posar-la a la dreta de la carta que acaba de posar l'altre jugador (i sempre de cara amunt amb els nombres visibles). L'objectiu del joc consisteix en anar col·locant les cartes seguint les següents normes:

- Després de col·locar la segona carta, el nombre de dues xifres que resulta ha de ser divisible entre 2.
- Després de col·locar la tercera carta, el nombre de tres xifres que resulta ha de ser divisible entre 3.
- Després de col·locar la quarta carta, el nombre de quatre xifres que resulta ha de ser divisible entre 4.
- ...i així, successivament.

Els jugadors (la Maria i el Joan), segueixen col·locant cartes fins que un dels dos no pot posar una altra carta que compleixi les normes del joc.

Aquí teniu un exemple de com es pot desenvolupar aquest joc:
La Maria posa la carta amb el número 5. El Joan col·loca la carta amb el número 8 a la dreta. Aquestes dues cartes formen el 58 que és múltiple de 2. Per tant, la carta que ha posat el Joan és bona i ara li toca tirar a la Maria. Aquesta posa la carta amb el número 2, i tenim el nombre 582, que és múltiple de 3. El Joan segueix el joc i posa la carta amb el número 0 i el nombre que surt ara és el 5820, que és múltiple de 4. Ara la Maria es mira les cartes que té per escollir que són: 1, 3, 4, 6, 7 ó 9 per poder fer un múltiple de 5. Com no pot, aleshores el Joan guanya aquesta partida.

Es demana que resolguis les qüestions següents:

a) En una partida, ha començat la Maria i, després de tres tirades ha quedat escrit el nombre 540. Quina carta o quines cartes es poden posar a continuació? Qui guanyaria aquesta partida? Justifica les teves respostes.

b) Ara comença a jugar en Joan i ell posa el 2 i la Maria el 8. Tenen el nombre 28. Quin nombre o nombres es poden posar a continuació? Qui guanyaria la partida? Justifica les teves respostes.

Més endavant decideixen jugar tos dos conjuntament per intentar arribar al nombre més llarg possible, sempre complint les regles del joc. Ràpidament arriben fins al nombre de cinc xifres 12365.

c) Creus que podrien fer aquest nombre més llarg amb les cartes que els queden? Quan haurien de parar? Justifica les teves respostes.

d) Seria possible utilitzar les deu cartes per a formar un nombre de 10 xifres que compleixi les condicions del joc? Dóna un raonament per a la teva resposta