# Problemes a l'esprint

## Equips de batxillerat. 12 de febrer de 2014

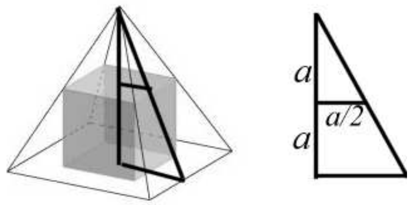
### Les solucions

1. **Resposta: 353**.

   Tenim $aba + cddc = 2014$. Com que la columna de les centenes a la dels milers n'hem de portar però només en podem portar 1, deduïm que $c = 1$. De la columna de les unitats tenim que $a + c = 4$ (no pot ser 14) i per tant $a = 3$. De la columna de les centenes es veu que $d$ ha de ser 6 o 7 i, per tant, la columna de les desenes ha de sumar 11 i no pot ser que sumi 1. Per tant $b + d = 11$ i $1 + a + d = 10$. Serà doncs $d = 6$ i $b = 5$. La suma demanada és $353 + 1661 = 2014$.

2. **Resposta:** $\frac{3}{8}$.

   En la figura s'ha dibuixat l'altura de la piràmide regular, que passa pel centre del cub. Per la semblança de triangles es dedueix que la distància del peu de l'altura a una de les arestes del quadrat de la base és igual que l'aresta $a$ del cub i, per tant, la base és un quadrat de costat $2a$.

   El volum del cub és $V_{cub} = a^3$.
   El volum de la piràmide és $V_{pir} = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot 2a = \frac{8}{3}a^3$ i, per tant, el volum del cub dividit pel volum de la piràmide és $\frac{3}{8}$.

3. **Resposta: 3 cm**.

   El nombre que passa del problema 5 és $B = 25$.
   La quantitat d'aigua que hi ha al dipòsit, on hi arriba a una altura de 18 cm (el 60% de 30 cm), és $V_{aigua} = \pi \cdot 10^2 \cdot 18 = 1800\pi\text{cm}^2$. Si $r$ és el radi de cadascuna de les 25 esferes que hi submergim, el volum total d'aquestes esferes és $V_{esferes} = 25 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{100}{3}\pi r^3$. L'enunciat i el teorema d'Arquimedes ens diuen que $1800\pi + \frac{100}{3}\pi r^3 = \frac{90}{100}\pi \cdot 10^2 \cdot 30$. Si simplifiquem obtindrem $18 + \frac{r^3}{3} = 27$ i, d'ací, $r = 3$.

4. **Resposta: 48.000 km**.

   Veiem per l'enunciat que amb el que es gasta un pneumàtic per cada quilòmetre quan està posat al davant això permet recórrer $\frac{3}{2}$ quilòmetres si el posem al darrere.
   Ara imaginem que quan hem recorregut $x$ quilòmetres canviem els pneumàtics de posició, passem els del davant al darrere i els del darrere al davant. Als pneumàtics del davant els quedarien per recórrer $40000 - x$ "del davant" però això permet fer $(40000 - x) \cdot \frac{3}{2}$ km si els posem al darrere En total poden arribar, doncs, a $x + (40000 - x) \cdot \frac{3}{2}$ km.

Mirem els pneumàtics del darrere. Quan es canvien també han fet $x$ quilòmetres. Els queden per gastar $60000 - x$ quilòmetres "del darrere", que permeten recórrer $(60000 - x) \cdot \frac{2}{3}$ al davant i, doncs, poden arribar a $x + (60000 - x) \cdot \frac{2}{3}$ km.
La màxima durada s'aconseguirà quan, mitjançant el canvi de posició, s'assoleixi la mateixa durada per als del davant i els del darrere.
Si resolem l'equació $x + \frac{3}{2}(40000 - x) = x + \frac{2}{3}(60000 - x)$ obtenim $x = 24000$ i la durada dels pneumàtics és $x + \frac{3}{2}(40000 - x) = x + \frac{2}{3}(60000 - x) = 48000$ km.

---

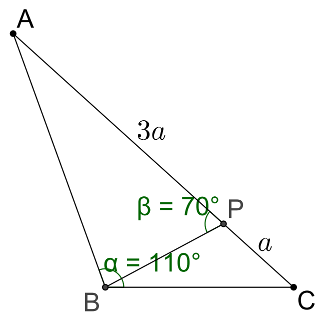
**5. Resposta:** $B = q - 4r = 25$.

Les dues equacions de l'enunciat es poden escriure $q \cdot (p + r) = 2014$ i $p \cdot (q + r) = 1860$ i, si les restem, obtenim $r \cdot (q - p) = 154$.
Les descomposicions en factors primers que interessen són: $2014 = 2{\cdot}19{\cdot}53$, $1860 = 2^2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}31$ i $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$.
Ha de ser $q = 53$ (i aleshores tindrem $p + r = 38$ perquè si imaginem $q = 2$ o $q = 19$ no trobarem dos factors primers, un de 1860 i un de 154 que sumin el que haurien de sumar $p + r$, que seria 1007 o bé 106.
Es pot veure que l'única manera d'escollir $p$ com un factor primer de 1860 i $r$ com un de 154 que sumin 38 és $p = 31$ i $r = 7$.
La solució del problema és, doncs, $p = 31$, $q = 53$ i $r = 7$.

---

**6. Resposta: 12 unitats**.

L'angle $\angle BPC$, és a dir l'angle en $P$ del triangle $BPC$ és suplementari de $\angle APB$ i, doncs, fa $\angle BPC = 110°$. Com que, a més, l'angle en $C$ és comú per als triangles $ABC$ i $BPC$ se'n dedueix que aquests dos triangles són semblants.
Si indiquem $PC = a$ serà $AC = 4a$ i la proporcionalitat de longituds dels costats ens diu que $\frac{4a}{6} = \frac{6}{a}$. D'aquí es dedueix que $a = 3$ i, per tant, que el costat $AC = 4a = 12$.




---

**7. Resposta:** $\frac{11}{16}$.

Per a la resolució numèrica es necessitaven dos nombres $n = 5$ i $p = 3$ que es deduïen de la solució de l'exercici 1.
Potser és més ràpid comptar la probabilitat de l'esdeveniment contrari que la que demana l'enunciat. Perquè fos campió l'equip **MNP** hauria de guanyar tres dels quatre partits que resten per jugar. Podrien ser el segon, el tercer i el quart, cosa que té probabilitat $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, o uns altres tres, que ens porta tres situacions favorables (per exemple **MNP, MNP, ABC, MNP**) cadascuna d'ells amb probabilitat $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Per tant la probabilitat que quedi campió **MNP** condicionada a que **ABC** hagi guanyat el primer partit és $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$ i la de que hi quedi **ABC** és, doncs, $1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

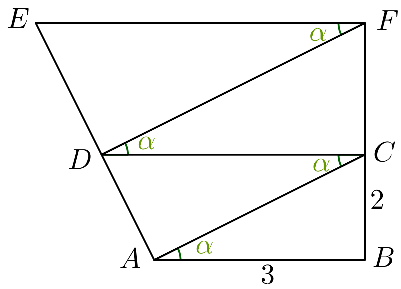
---

**8. Resposta: 3.**

Podem escriure $x^2+y^2+2xy+6x+6y+4=(x+y)^2+6(x+y)+12$. Si $x, y$ són nombres reals, també ho serà $z=x+y$ i ens interessa trobar el mínim de la funció $f(z)=z^2+6z+12$ que ja sabem que té com a gràfica una paràbola, de la qual el vèrtex, que correspon al mínim s'assoleix per $z=\dfrac{-6}{2}=-3$ i té valor $f(-3)=3$. Aquest valor mínim de l'expressió de l'enunciat s'assolirà per infinites parelles de valors de $x, y$, totes aquelles que compleixin $x+y=-3$.

---

**9. Resposta: $\dfrac{5500}{243}$.**




Per a la resolució numèrica d'aquest problema vénen nombres des dels problemes 4 i 8, $M=2, N=3$.

Els quatre triangles rectangles en què es descompon el trapezi són semblants perquè els quatre angles assenyalats amb $\alpha$ són iguals.

La raó de semblança entre el primer triangle de baix i el segon triangle és $k=\dfrac{\sqrt{2^2+3^2}}{3}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ perquè la hipotenusa del primer triangle és el catet llarg del segon triangle. Aquesta raó de semblança és, $k=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ i com que el catet llarg de cada triangle (excepte l'inferior) és la hipotenusa del triangle de sota, se'n dedueix que la raó de semblança indicada és la que existeix entre cada triangle i el que té juxtaposat a sobre. Aleshores:

$$EF=AC\cdot k^3=\sqrt{13}\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^3=\frac{169}{27};\qquad FC=CB\cdot k^2=2\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2=\frac{26}{9}.$$

L'altura del trapezi rectangle $ABFE$ és $2+\dfrac{26}{9}=\dfrac{44}{9}$ i, per tant, l'àrea demanada és

$$A=\frac{\left(3+\dfrac{169}{27}\right)\cdot\dfrac{44}{9}}{2}=\frac{5500}{243}.$$

---

**10. Resposta: 2195.**

Pel nombre que passa del problema anterior, cal determinar la suma de les xifres de la 243a fila del triangle numèric en estudi.

Observem que fins a la fila $f$-sima hi ha tants nombres com la suma dels $f$ primers nombres imparells positius, és a dir $f^2$ nombres.
Per aquesta raó la quantitat de nombres que hi ha en les 242 primeres files és $242^2=58564$, que seran 5856 grups de xifres $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$ i 4 xifres més, $\{1,2,3,4\}$, i la 243a fila començarà amb un 5.
A la fila 243a hi ha $2\times 243-1=485$ xifres, que són concretament 48 grups de 10 xifres $\{5,6,7,8,9,0,1,2,3,4\}$ i 5 xifres més, que seran $\{5,6,7,8,9\}$ i la suma demanada és doncs, $48\times 45+35=2195$.

---