Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. 12 de febrer de 2014

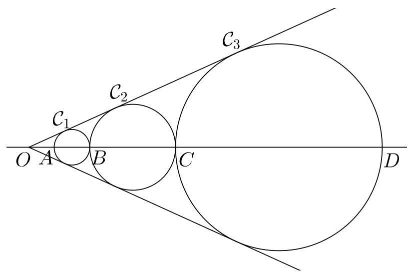
Problemes de propina. Les solucions

1. Resposta: 50.

Cerquem els nombres reals x que compleixen $201\{x\} + 4[x] = 2014$.
Com que $0 \le \{x\} < 1$ haurà de ser $1813 < 4[x] \le 2014$ i per tant $453{,}25 < [x] \le 503{,}5$ és a dir que els possibles valors de la $[x]$ són els 50 nombres de l'interval $[454, 503]$.
Per cadascun d'aquests valors de $[x]$ trobem un únic valor de $\{x\}$, a saber $\{x\} = \dfrac{2014 - 4[x]}{201}$.
Per als valors de $[x]$ en l'interval que hem indicat, aquest és un nombre més gran que 0 i més petit que 1.
D'aquesta manera queden determinats 50 valors de x que són solució de l'equació.

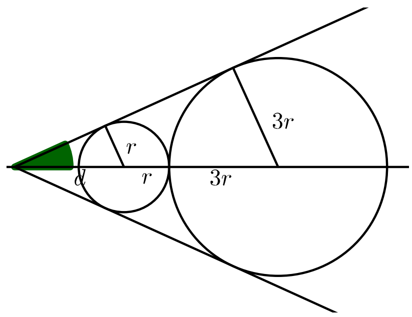
---

2. Resposta: 60°.



Observeu la figura. L'homotècia de centre 0 que transforma la circumferència C_1 en la circumferència C_2 també transforma la circumferència C_2 en la C_3. Només cal que us fixeu que els punts A i B (extrems del diàmetre de C_1 situats a la bisectriu de les rectes que es tallen) es transformaran per l'esmentada homotècia, respectivament, en els punts B i C (extrems corresponents del diàmetre C_2). Però si tansforma B en C com que aquests punts són els extrems esquerres dels diàmetres de C_2 i C_3, en resulta que la mateixa homotècia també transforma C_2 en C_3.

Per tant, si indiquem amb k la raó de l'esmentada homotècia i r és el radi de la circumferència C_1, el radi de C_2 serà $k \cdot r$ i el radi de C_3 serà $k^2 \cdot r$. L'enunciat ens diu aleshores que $r + 2k \cdot r + k^2 \cdot r = 16r$. D'aquesta equació en resulta $k = 3$.

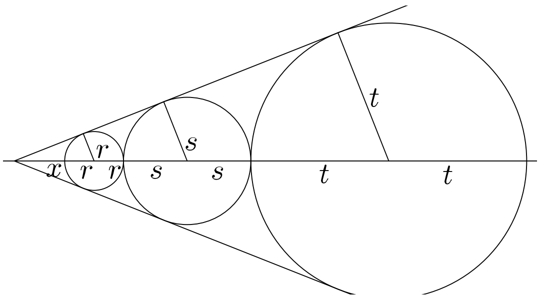


Si indiquem amb d la distància del punt de tall de les dues tangents al centre de la circumferència menuda i tracem els radis perpendiculars a la tangent superior, en podem deduir per semblança de triangles que $\dfrac{d}{r} = \dfrac{d + 4r}{3r}$. D'aquí se'n dedueix que $d = 2r$ i, per tant, el sinus de l'angle assenyalat en la figura és $\dfrac{1}{2}$ i, doncs, l'angle indicat és de 30° i l'angle demanat en el problema, que és el doble d'aquest és de 60°.

Dos comentaris.

Podeu veure una altra manera de demostrar que la raó k de radis només depèn de l'angle que formen les dues rectes. Es tracta d'imaginar una figura com l'anterior amb kr en comptes de $3r$ i indiquem amb α l'angle acolorit.
Tenim que $\sin\alpha = \dfrac{r}{d}$ i que $\sin\alpha = \dfrac{kr}{x + r + kr}$. De la segona igualtat se'n dedueix $d\sin\alpha + r\sin\alpha + kr\sin\alpha = kr$ i de la primera $r = d\sin\alpha$ i, per tant $r + r\sin\alpha + kr\sin\alpha = kr$ i, com que es pot simplificar r, k només depèn de l'angle α.

A petidió d'alguns centres publiquem també una solució "amb un sistema d'equacions", que és la que es pot trobar a *The UK Mathematics Trust Yearbook 2011-2012*, que ha estat la font d'alguns dels problemes d'aquesta convocatòria.



En la figura es poden observar tres triangles semblants que es formen amb la recta de centres de les circumferències, una de les tangents i els radis perpendiculars a la tangent. Indiquem les longituds dels tres radis amb r, s, t i x és tal que $x+r$ és la distància del punt de tall de les tangents al centre de la circumferència menuda.

De l'enunciat se'n dedueix que $16r = r + 2s + t$ i, doncs, $t = 15r - 2s$.

Per la semblança de triangles podem escriure $\dfrac{r}{r+x} = \dfrac{s}{x+2r+s} = \dfrac{t}{x+r+16r}$. De la primera d'aquestes dues igualtats podem aïllar $s = \dfrac{rx+2r^2}{x}$. Si igualem ara la primera fracció a la tercera i hi substituïm t pel valor donat per l'enunciat i s pel valor que acabem d'obtenir, operem i simplifiquem, arribarem a $3x^2 - 2rx - r^2 = 0$. Es veu que $x = r$ és una solució d'aquesta equació i és l'única que interessa al problema perquè $3x^2 - 2rx - r^2 = (x-r)(3x+r)$.

Com que $x = r$, el sinus de l'angle que formen una tangent amb la línia de centres és $\sin\alpha = \dfrac{r}{x+r} = \dfrac{1}{2}$, aquest angle α és doncs de 30° i l'angle demanat en el problema és de 60°.

---

3. Resposta: 125 possibles resultats.

Si indiquem com $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ els vectors corresponents a tres arestes concurrents del cub, amb origen en el vèrtex indicat, les dotze arestes del cub, després d'assignar-los aleatòriament un sentit o un altre seran: quatre iguals a $\vec{i}$ o a $-\vec{i}$, quatre iguals a $\vec{j}$ o a $-\vec{j}$ i quatre iguals a $\vec{k}$ o a $-\vec{k}$. Els quatre primers sumen un d'aquests cinc valors: $\{-4\vec{i}, -2\vec{i}, 0, 2\vec{i}, 4\vec{i}\}$, els quatre segons un valor de $\{-4\vec{j}, -2\vec{j}, 0, 2\vec{j}, 4\vec{j}\}$ i els altres un d'aquests: $\{-4\vec{k}, -2\vec{k}, 0, 2\vec{k}, 4\vec{k}\}$. Com que $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ són independents totes les possibilitats que resulten de sumar un vector del primer conjunt, amb un del segon i amb un del tercer són diferents. El nombre d'aquestes possibles sumes és, doncs, $5 \times 5 \times 5 = 125$.
