Problemes a l'esprint. Batxillerat

10 de febrer de 2016. Solucions comentades

Primer grup de problemes

1. Solució: $\frac{48}{7}$.

Si indiquem amb N la part entera del nombre, la part decimal ha de ser, segons l'enunciat, $\frac{N}{7}$. Com que la part decimal ha de ser més petita que 1 i N ha de ser un nombre natural, el màxim valor que pot tenir és $N = 6$. Per tant el nombre que demana l'enunciat és $6 + \frac{6}{7} = \frac{48}{7}$.

2. Solució: 90.

En la successió 2, 2, 4, 4, 4, 4, ..., $2n$, $2n$, ..., $2n$ (amb $2n$ termes iguals a $2n$), el nombre de termes que hi ha és $2 + 4 + \cdots + 2n$. Tenim doncs una progressió aritmètica de n termes que sumen $\frac{2+2n}{2} \cdot n = (1+n) \cdot n$. Aquest nombre és la quantitat de termes de la successió inicial, que volem que sigui superior a 2016. Podem fer-ho amb una inequació, però si mirem l'arrel quadrada de 2016, que és 44,9, comprovem que fins a $2n = 88$ hi ha $(1+44) \cdot 44 = 1980$ termes i fins a $2n = 90$ ja n'hi ha $(1+45) \cdot 45 = 2070$ i, doncs, el terme 2016è de la llista és igual a 90.

3. Solució: 26 ovelles i 10 gallines.

Indiquem amb x el nombre d'ovelles i amb y el nombre de gallines. El nombre F que ve d'un altre problema és $F = 160$.
Com que cada ovella té 5 "potes+cap" i cada gallina, 3, l'enunciat ens diu $160 = 5x + 3y$.
Com que $2y < x$ ha de ser $y < x/2$ i per tant $160 < 5x + 3x/2 = 13x/2$ i, doncs, $x > 24,6$ i com que ha de ser enter $x \geq 25$.
Com que $3y > x$ ha de ser $y > x/3$ i per tant $160 > 5x + 3x/3 = 6x$ i, doncs, $x < 26,7$ i com que ha de ser enter $x \leq 26$.
Si provem aquests dos possibles valors de x podrem comprovar que l'únic que dóna per a y un valor enter és $x = 26$ i resulta $y = 10$.

4. Solució: 18.

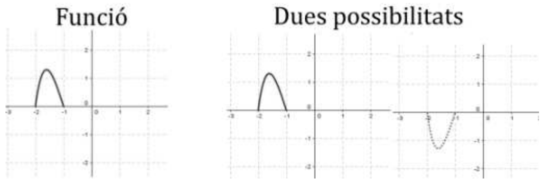
L'angle interior d'un heptàgon regular, en graus, és $\alpha = \frac{180 \cdot 5}{7}$.

Per tant, el nombre de graus de cada un dels set sectors circulars és $360 - \alpha = \frac{1620}{7}$. Com que hem de sumar l'àrea de 7 d'aquests sectors, en total faran 1620° i, com que el radi dels cercles que determinen els sectors és 2, l'àrea total és $S = \frac{1620 \cdot 4\pi}{360} = 18\pi$.

Segon grup de problemes

5. Solució: 16.

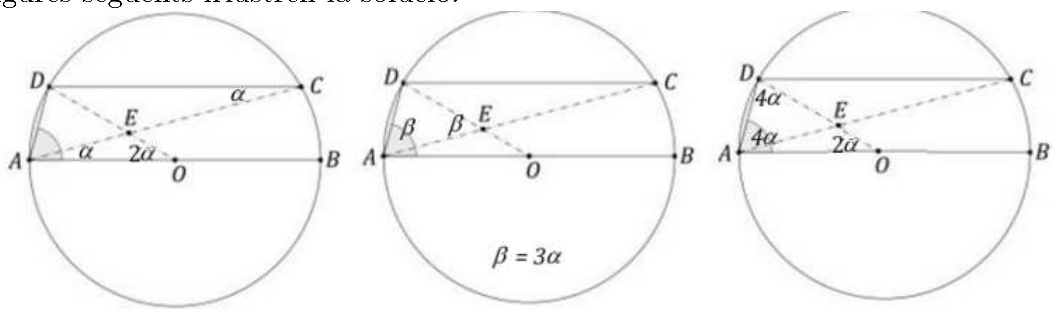
Analitzem què succeeix en l'interval [-2, -1].
Només hi ha dues possibles gràfiques que, quan en fem el valor absolut, ens donin la que interessa: la mateixa gràfica i la que resulta de canviar-li el signe.



Això mateix passa per a la gràfica en l'interval [-1, 1], en l'interval [1, 2] i en l'interval [2, 3]. Dues possibles gràfiques en cada interval. Com que cada possibilitat es pot combinar amb cada possibilitat en un altre interval i resulten sempre funcions contínues, el total de gràfiques que compleixen l'enunciat en l'interval [-2, 3] és $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

6. Solució: 72°.

Les tres figures següents il·lustren la solució.



En la primera veiem que els dos angles indicats amb α, $\angle DCA$ i $\angle BAC$, són iguals per alterns interns entre les dues paral·leles que ens indica l'enunciat. Per altra banda, com que l'angle central $\angle DOA$ i l'angle inscrit $\angle DCA$ abracen el mateix arc, es dedueix que $\angle DOA = 2\alpha$.
En la segona figura els dos angles indicats amb β són iguals perquè el triangle AED és isòsceles segons l'enunciat. Com que l'angle en E del triangle AOE és igual a $180° - 3\alpha$, l'angle en E del triangle AED és $\beta = 3\alpha$.
Aleshores l'angle en A del triangle AOD és $\alpha+\beta = 4\alpha$ i com que aquest triangle és isòsceles (perquè OA i OD són radis) l'angle en D també es 4α i, doncs, els tres angles sumen $4\alpha+4\alpha+2\alpha = 10\alpha = 180°$. Es dedueix que $\alpha = 18°$ i que l'angle demanaat és $4\alpha = 72°$.

7. Solució: $\dfrac{13}{324}$.

El nombre que ve d'un altre problema és $B = 48$.
Imaginarem que tirem els quatre daus successivament; el nombre de casos possibles de l'experiment és 6^4. Com que $48 = 2^4 \cdot 3$ els possibles productes de quatre factors amb nombres de l'1 al 6 que donen 48 són:

- Amb un sis (no en pot tenir dos). Com que $6 \cdot 8 = 48$ trobem $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (que ens dóna 4 ordenacions possibles, 4 casos favorables) i $6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$, que ens dóna 24 ordenacions.
- No pot sortir cap cinc.
- Si el nombre més gran que surt és un quatre, com a màxim en poden sortir dos. Amb dos quatres tenim el producte $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$ que dóna 12 casos favorables. Amb un sol quatre l'únic possible producte que dóna 48 és $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ que ens aporta 12 casos favorables més.
- Si el nombre més gran que surt és el 3 no es pot obtenir producte 48.

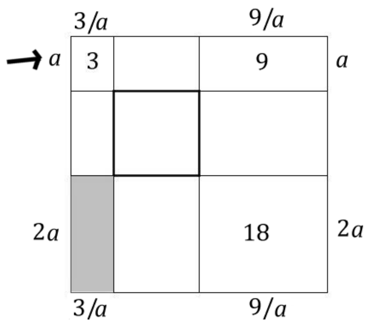
Per tant el nombre de casos favorables és $4 + 24 + 12 + 12 = 52$ i la probabilitat és $\dfrac{52}{4^6} = \dfrac{13}{324}$.

8. Solució: 9.

Si el nombre M, enter positiu, té 7 divisors positius només pot ser un nombre de la forma $M = m^6$ i el conjunt dels seus divisors, ordenat, és $\{1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6\}$. La suma dels tres divisors centrals és $m^2+m^3+m^4 = m^2\cdot(1+m+m^2)$. Com que ha de ser $2793 = 3\cdot 7^2\cdot 19 = m^2\cdot(1+m+m^2)$ es dedueix que ha de ser $m = 7$ i per tant $M = 7^6$, que acaba en 6.

Reptes finals

9. Solució: 11 unitats.



Les àrees conegudes són les que es mostren a la figura. Hi hem indicat com a la mesura d'uns dels costats dels rectangles petits i a partir d'aquest valor, mirant el rectangle d'àrea 3 deduïm el segment que mesura $\dfrac{3}{a}$ i mirant el rectangle d'àrea 9 deduïm el que mesura $\dfrac{9}{a}$. Com que aquesta darrera mesura coincideix amb la d'un dels costats del rectangle d'àrea 18 deduïm que l'altre costat d'aquest rectangle és $\dfrac{18}{9/a} = 2a$.

Aleshores, si c és el costat del quadrat central, mirant els costats del quadrat exterior, veiem que s'ha de complir $c\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{a} = c+a+2a$.

Si resolem aquesta equació veiem que ha de ser $a = 2$.

Els costats del rectangle gris, $\dfrac{3}{a}$ i $2a$, mesuren doncs $\dfrac{3}{2}$ i 4 i ja podem coneixer-ne el perímetre.

10. Solució: $[-\dfrac{4}{11}, 2]$.

Si sumem les tres equacions $x+y = m^2$, $y+z = 11m$ i $z+x = 4$ resulta $x+y+z = \dfrac{m^2+11m+4}{2}$.

Si d'aquesta equació restem les tres de l'enunciat, obtenim, respectivament, $z = \dfrac{-m^2+11m+4}{2}$, $x = \dfrac{m^2-11m+4}{2}$ i $y = \dfrac{m^2+11m-4}{2}$.

Si ha de ser $x \le y$ tenim $\dfrac{m^2-11m+4}{2} \le \dfrac{m^2+11m-4}{2}$ o, equivalentment, $-11m+4 \le 11m-4$, d'on $8 \le 22m$ i $m \ge \dfrac{4}{11}$.

La condició $y \le z$ equival a $\dfrac{m^2+11m-4}{2} \le \dfrac{-m^2+11m+4}{2}$ que, operant, es pot escriure com $2m^2 \le 8$ és a dir $-2 \le m \le 2$.

Les dues condicions es compleixen si $\dfrac{4}{11} \le m \le 2$, és a dir si $m \in [\dfrac{4}{11}, 2]$.

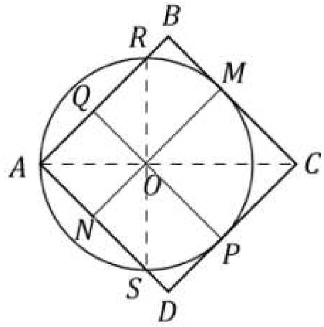
Problemes "de propina"

1. Solució: 2520.

Per fer el recompte de quants nombres de nou xifres, amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 cada una una vegada tenen les xifres 1, 2, 3, 4, 5 en el seu ordre natural hem de triar cinc posicions de les 9 per a posar-hi 12345 en aquest ordre i això combinar-ho amb les possibles ordenacions, en les altres quatre posicions, dels nombres 6789. El resultat d'aquest recompte és $\binom{9}{5}\cdot P_4 = 126\cdot 24 = 3024$. Però en aquest càlcul hi ha comptats els nombres que tenen en l'ordre natural també el 6, és a dir 123456. Els haurem de descomptar. Raonant com abans veurem que són $\binom{9}{6}\cdot P_3 = 84\cdot 6 = 504$. La resposta al problema és, doncs, $3024 - 504 = 2520$.

2. Solució: $2\pi + 4\sqrt{2} + 2$.

A la figura, $ABCD$ és el quadrat de l'enunciat, O és el centre del cercle i M i P són els punts de tangència del cercle amb els costats del quadrat.
Pels punts de tangència M i P fem perpendiculars als costats del quadrat. Com que en aquests punts la tangent és perpendicular al radi, aquestes rectes es tallen en el centre O del cercle i determinen els punts N i Q en els costats del quadrat.
Aleshores $ANOQ$ és un quadrat. Efectivament, els costats són perpendiculars per construcció i $NO = QO$ perquè ambdós segments tenen com a longitud el costat del quadrat menys el radi del cercle.



Com que el triangle AOQ és un triangle rectangle isòsceles, del qual la hipotenusa és 2 (el radi del cercle) els catets fan $\sqrt{2}$. Deduïm que el costat del quadrat és $2 + \sqrt{2}$.
Si unim O amb el punt R on es tallen el cercle i el quadrat, resulta que el triangle ROQ és igual al AOQ (triangles rectangles amb un catet comú i les dues hipotenuses de la mateixa longitud perquè són radis). Per tant RO és perpendicular al diàmetre OC i, com que el mateix podríem fer per al punt S, en resulta que RS és un diàmetre.
L'àrea buscada és igual a l'àrea del cercle més l'àrea del quadrat menys l'àrea comuna, que és igual a mig quadrat de costat AR (que mesura $AQ + QR = 2\sqrt{2}$) més mig cercle.
L'àrea serà, doncs, $= 4\pi + (2+\sqrt{2})^2 - (2\pi + \frac{(2\sqrt{2})^2}{2}) = 2\pi + 4\sqrt{2} + 2$.

Hem donat la solució raonant estrictament cada propietat que després volem aplicar, per exemple que $ANOQ$ és un quadrat o que RS és un diàmetre. És possible que alguns dels equips participants haguessin "vist" i utilitzat aquestes propietats sense demostrar-ho en aquell moment, cosa ben vàlida per als Problemes a l'esprint (mentre sigui cert allò que "veiem") però per a publicar-ho cal justificar-ho completament.

---

3. Solució: $\frac{7}{4}$.

Com que $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ si ho apliquem per $x = 2$ tenim $f(2) + f(-1) = 2$, per $x = -1$ resulta $f(-1) + f(\frac{1}{2}) = -1$ i, finalment, per $x = \frac{1}{2}$ deduïm que $f(\frac{1}{2}) + f(2) = \frac{1}{2}$.
Serà doncs $f(2) + f(-1) - (f(-1) + f(\frac{1}{2})) + f(\frac{1}{2}) + f(2) = 2 - (-1) + \frac{1}{2}$. Si operem i simplifiquem obtenim $2f(2) = \frac{7}{2}$ i, doncs $f(2) = \frac{7}{4}$.