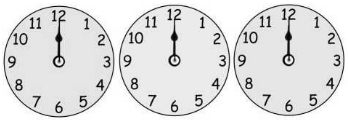
Problemes a l'esprint

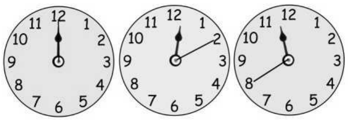
Equips de 1r i 2n d'ESO. 27 de febrer de 2013

Problemes de la branca d'olivera

1. El dia 6 de gener de 2013 al migdia vam engegar tres rellotges nous, i els vam posar a l'hora, les 12.



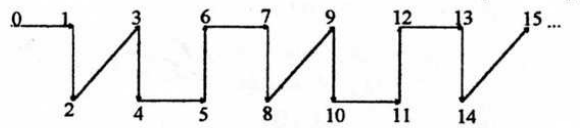
L'endemà al migdia ens vam adonar que un dels rellotges marcava l'hora amb tota puntualitat, que un altre s'havia avançat exactament 10 minuts i que el tercer s'havia retardat exactament 20 minuts.



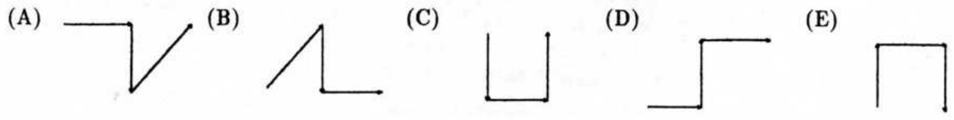
Si no els arregléssim, i els deixéssim funcionar així, en quina data els tres rellotges tornarien a assenyalar les 12, tots tres alhora, al migdia?

El dia de la solució d'aquest problema (no el mes ni l'any) l'heu de passar al problema 7 com a valor de AB.

2. Els nombres enters del 0 al 2013 es col·lloquen seguint l'esquema següent:

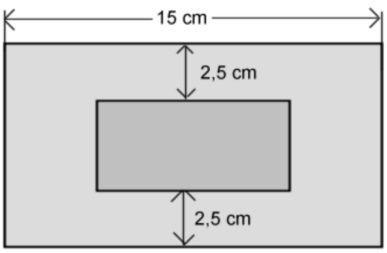


Recordeu que hem començat amb el 0 i deduïu quina és la successió de fletxes que porten del 2010 al 2013.



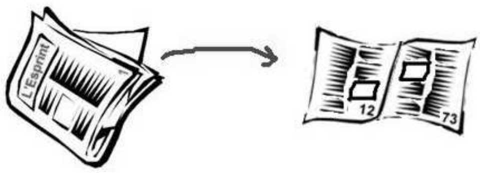
3. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre S que passa del problema 5.*

L'Ariadna està dissenyant un logotip rectangular, que ha de tenir S cm^2 de superfície, amb un altre rectangle a dintre. Els dos rectangles tenen els costats paral·lels i a la figura (que només és indicativa, no està feta a escala) teniu indicada la mesura de l'amplada del rectangle i la de la franja que l'Ariadna deixa a la part superior i a la part inferior entre els dos rectangles.



Si el rectangle interior ha de tenir àrea igual a la quarta part de l'àrea total, quin serà el seu perímetre?

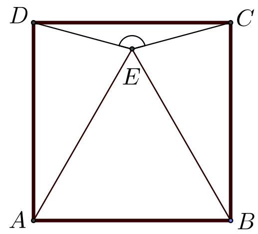
4. L' Enric ha agafat un full de diari per embolicar un paquet. Al full que ha agafat hi veu, juntes, les pàgines 12 i 73. Quantes pàgines tenia el diari?



La resposta d'aquest problema passa com a valor M al primer repte (problema 9).

Problemes del colom de la pau

5. En la figura adjunta $ABCD$ és un quadrat i ABE és un triangle equilàter. Quina és la mesura de l'angle assenyalat?



La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre S.

6. Quatre persones han reunit entre totes un capital de 4000 €. La Maria, que és la que ha invertit més diners, ha posat 200 € més que en Pere, 300 € més que la Carlota i 500 € més que en David. Quant ha posat en David?

7. *Per resoldre aquest problema cal conéixer dues xifres AB que passen del problema 1.*

Escrivim una llarguíssima cadena de xifres a base d'anar posant un darrere l'altre i ordenadament els nombres naturals a partir de l'1 i fins al 2013. Serà així:

123456789101112131415...2010201120122013

Quantes vegades en aquest llarg nombre apareixen seguides les xifres A i B en aquest ordre, formant AB ?

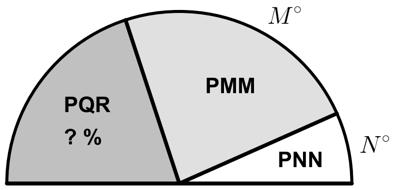
8. Amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8, fent servir cada xifra una vegada i una sola, podem escriure el quadrat N^2 i el cub N^3 d'un nombre natural N. Quin és el nombre N?

El nombre N de la solució passa al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres M i N que passen, respectivament, dels problemes 4 i 8.

9. En unes eleccions han participat tres partits, en direm **PMM, PNN** i **PQR**. En un diagrama de sectors per representar els nombres de vots de les eleccions en un semicercle, el sector que correspon al partit **PMM** es de $M°$ i el que correspon al partit **PNN** és de $N°$. Quin és el percentatge de vots que ha obtingut el partit **PQR**?



La solució d'aquest problema passa a l'exercici següent com a R.

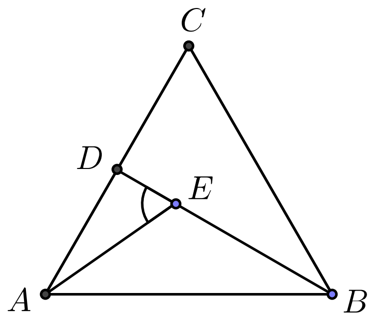
El nombre R de l'enunciat del problema 10 passa del problema anterior.

10. La mitjana aritmètica de cinc nombres enters positius diferents és R, i la mediana és $R+2$. Quin és el valor més gran que pot tenir un dels cinc nombres?

Reptes "de propina", fora de concurs

11. En una festa amb moltes persones assistents, en un determinat moment totes les parelles que ballen les formen un home i una dona. Estan ballant els 2/3 dels homes i els 3/5 de les dones que hi ha a la festa. Quina és la proporció de persones que en aquest moment no ballen respecte el total de persones assistents a la festa?

12. A la figura, ABC és un triangle equilàter, BD és la bisectriu de l'angle en B, i el segment AE divideix l'angle en A de manera que l'angle BAE és el doble de langle EAD. Quina és la mesura de l'angle marcat?



13. Una aixeta omple un dipòsit en 2 hores. El dipòsit té un desguàs que el buida en 1 hora si el dipòsit està ple. S'està omplint el dipòsit i, quan està exactament mig ple, sense tancar l'aixeta s'obre el desguàs. Quina part del dipòsit estarà plena al cap de mitja hora?

Problemes a l'esprint

Equips de 1r i 2n d'ESO. 27 de febrer de 2013

Participació i resultats

La participació en aquesta dotzena edició ha assolit el màxim, tant pel que fa a centres participants (92, de Catalunya, les Illes Balears i el País Valencià), total d'equips i d'alumnes que els componien segons la base de dades (més de 100 equips i més de 2000 alumnes) i nombre d'equips amb encert ple (46 equips, molts d'ells amb encert també en els reptes suplementaris)vskip+0.5em

Centres més destacats

L'equip que va enviar més ràpidament totes les respostes correctes és
Institut Rafael Campalans, d'Anglès (La Selva)
que ho va fer amb un temps de concurs de molt poc més de tres quarts d'hora.
Destaquem també amb un temps de concurs inferior a 63 minuts:
Institut Jaume Vicens Vives, de Girona que va enviar totes les respostes correctes, al primer intent, en un temps d'una hora i 10 minuts.

Altres equips destacats

Institut Arquitecte Manuel Raspall, de Cardedeu (Vallès Oriental)
Institut Jaume Vicens Vives, de Girona (Gironès)
Institut Samuel Gili i Gaya de Lleida (Segrià)
Institut Sant Quirze del Vallès de Sant Quirze (Vallès Occidental)
Institut Santa Eugènia, de Girona (Gironès)
que van respondre també amb encert els tres reptes "de propina" i que hem indicat per ordre alfabètic del nom del centre.

Tanmateix és important felicitar a tots els centres participants, al professorat que ha impulsat la participació i a les noies i els nois components de tots els equips que han estat una bona estona fent matemàtiques.

Per realçar el fet que el que és interessant és l'activitat col·laborativa per a la resolució de problemes i la participació, a l'acte d'entrega de premis dels **Problemes a l'esprint** es convidarà, a més de l'equip de l'Institut Rafael Campalans, d'Anglès, algun altre dels 46 equips que han enviat la resposta correcta a l'activitat, que se seleccionarà per sorteig.

Relació de tots els altres centres que van enviar totes les respostes correctes

IES Bellaguarda (Altea)
Institut Domènec Perramon (Arenys de Munt)
Institut Badalona VII (Badalona)
Casa del Roure (Barcelona)
Aula Escola Europea (Barcelona) (4 equips)
Institut Dr. Puigvert (Barcelona)
Institut Les Corts (Barcelona)
Institut Príncep de Girona (Barcelona)
Escola Betania-Patmos (Barcelona)
Escola Joan Pelegrí (Barcelona)
Institut Joan Brossa (Barcelona)
Institut Joan d'Àustria (Barcelona)
Institut Francisco de Goya (Barcelona)
Secció Josep Comas i Solà (Barcelona)
IES Vicent Castell Domènech (Castelló de la Plana)
IES 3 (Dénia)
Institut El Cairat (Esparreguera)
Institut Montilivi (Girona)
Col·legi Jardí (Granollers)
Institut Celestí Bellera (Granollers)
IES Pere Vives Vich (Igualada)
Col·legi Mare de Déu de Montserrat (Les Borges Blanques)
Institut Josep Lladonosa (Lleida)
Institut Pius Font i Quer (Manresa)
Escola Montcau-La Mola (Matadepera)
Institut Montsacopa (Olot)
Col·legi Regina Carmeli (Rubí)
Fundació Llor (Sant Boi de Llobregat)
Pureza de Maria (Sant Cugat del Vallès)
Institut Sant Feliu (Sant Feliu de Guíxols)
Institut Tarragona (Tarragona)
La Salle Torreforta (Tarragona)
Escola Tecnos (Terrassa)
Col·legi Sagrada Família (Tortosa)
Institut Narcís Oller (Valls)
Institut Alt Penedès (Vilafranca Penedès)
IES Broch i Llop (Vila-real)

Els centres anteriors estan relacionats per ordre alfabètic del nom del municipi.

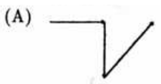
Problemes a l'esprint

Equips de 1r i 2n d'ESO. 27 de febrer de 2013

Les solucions

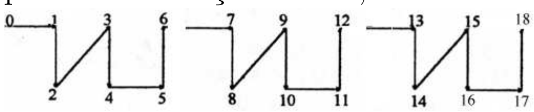
1. **19 de març de 2013**.

   El segon rellotge, el que en un dia s'havia avançat exactament 10 minuts, quant de temps trigarà a tornar a marcar les 12 quan siguin les 12? Haurem de comptar el temps necessari perquè s'avanci exactament 12 hores, és a dir 720 minuts. Si en 1 dia s'avança 10 minuts, per avançar-se 720 minuts necessita 72 dies exactes. Noteu, doncs, que tornarà a assenyalar correctament al migdia, no a la mitjanit.
   Semblantment el tercer rellotge, el que en un dia s'havia retardat 20 minuts necessita 36 dies exactes per tornar a ssenyalar les 12 quan siguin les 12, i això també passa amb un nombre exacte de dies, és a dir, que serà al migdia, no a la mitjanit.
   Com que aquest segon rellotge quan faci 72 dies també tornarà a assenyalar les 12 quan sigui el migdia, aquesta és la resposta.

2. 

.

   Es pot observar que la disposició dels nombres naturals presenta una cadència que es repeteix cada 6 fletxes i que, com que hem començat en el 0, acaba en cada múltiple de 6.

   Com que el 2010 és un múltiple de 6, per anar del 2010 al 2013 recorrerem les tres primeres fletxes del grup que es repeteix.

3. **25 cm**.

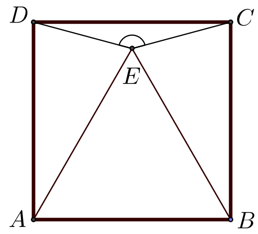
   L'àrea del rectangle gran és $S = 150$ cm^2. L'altura en serà, doncs, $\dfrac{150}{15} = 10$ cm.
   Per la dada que es dóna de l'amplada de la franja entre rectangles, podem deduir que l'altura del triangle menut és 5 cm. Com que l'altura és la meitat de la del rectangle gran, si l'àrea n'ha de ser una quarta part, com que $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$ això vol dir que la base del rectangle menut també haurà de ser la meitat de la base del rectangle gran, és a dir 7,5 cm. El perímetre serà doncs $5 + 5 + 7,5 + 7,5 = 25$ cm.

4. **84 pàgines**.

   Si al full que ha agafat l'Enric es veuen les pàgines 12 i 73, tal com es numeren els diaris a l'altra cara del full hi haurà les pàgines 11 i 74. Com que abans de la 11 hi ha 10 pàgines, després de la 74 també hi haurà 10 pàgines. El diari té, en total, 84 pàgines.
   Una alternativa la tenim pensant que si el diari té n pàgines, les dues pàgines que comparteixen la mateixa cara d'un full sumen sempre $n + 1$. Com que $12 + 73 = 85$, el diari té 84 pàgines.

Problemes del colom de la pau

5. 150°.



Recordem que els tres angles del triangle equilàter ABC són de 60° cada un.
Observem ara el triangle AED. L'angle en A d'aquest triangle és de 30° perquè és el complementari d'un dels angles de 60°. Ara bé, el triangle AED és isòsceles perquè el triangle AEB és equilàter i un dels seus costats és el costat del quadrat. Per tant els altres dos angles del triangle AED que no són el de 30° són iguals i, doncs, mesuren $\dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.
Per simetria podríem raonar exactament igual per al triangle BCE.
Mirant els quatre angles de la figura amb vèrtex en E deduïm que l'angle demanat és $360° - 75° - 60° - 75° = 150°$.

---

6. 750 €.

Si en Pere hagués posat 200 € més, la Carlota 300 € més i en David 500 € més, tots 4 haurien posat el mateix i, com que entre tots quatre haurien posat 5000 €, cadascun hauria posat $\dfrac{5000}{4} = 1250$ €. En realitat en David ha posat, doncs, $1250 - 500 = 750$ €.

---

7. 151.

AB=19. És clar que el recompte de quants 19 apareixen en

12345678910111213141 5...2010201120122013

és un problema que demana un recompte acurat i sistemàtic.Tenim:

- El 19 i els nombres que acaben en 19: $\{19, 119, 219, 319, ..., 1819, 1919\}$, que són 20.
- Els nombres de 3 xifres que comencen per 19: $\{190, 191, ..., 198, 199\}$, que són 10.
- Els nombres de 4 xifres que comencen per 19: $\{1900, 1910, ..., 1998, 1999\}$, que són 100. Observeu que el 1919 l'hem comptat dues vegades... però és que hi ha dos 19.
- Els nombres de 4 xifres que tenen el 19 al mig: $\{1190, 1191, ..., 1198, 1199\}$, que són 10.
- Les parelles de nombres que un acaba en 1 i el següent comença per 9. Són 91-92 i els $\{901 - 902, 911 - 912, ..., 981 - 982, 991 - 992\}$, en total, 11.

En total, doncs, observem que el 19 apareix $20 + 10 + 100 + 10 + 11 = 151$ vegades.

---

8. $N = 24$.

Per començar convé reflexionar que, en les condicions de l'enunciat, forçosament N^2 tindrà tres xifres i N^3 en tindrà cinc. Les altres possibilitats *a priori* perquè entre dos nombres tinguin vuit xifres, a saber una i set, dues i sis o quatre i quatre es descarten de seguida com a possibles nombres de xifres del quadrat i el cub d'un nombre natural.
Com que $\sqrt{999} = 31,6...$, el nombre natural més gran que té el quadrat de dues xifres és el 31. Com que $\sqrt[3]{10000} = 21,54...$ el nombre natural més petit que té el cub de cinc xifres és el 22. Per tant el nombre que busquem ha de ser d'aquests: $\{22, 23, \cdots, 29, 30, 31\}$.
Però com que per als nombres que acaben en 0, 1, 5, 6 el quadrat i el cub acaben amb la mateixa xifra i per als que acaben en 3, 7 o en 9 el quadrat o el cub acaben en 9, cosa que no està contemplada a l'enunciat, deduïm que el nombre que ens interessa ha de ser del conjunt $\{22, 24, 28\}$. Si fem la prova amb aquests tres nombres veurem que el N que compleix l'enunciat és $N = 24$.

Reptes finals

9. 40 %.

Els sectors que corresponen als partits **PMM** i **PNN** són de $M° = 84°$ i $N° = 24°$. Per tant el sector que correspon al partit **PQR** és de $180° - 84° - 24° = 72°$ i el percentatge serà $\dfrac{72 \cdot 100}{180} = 40\%$.

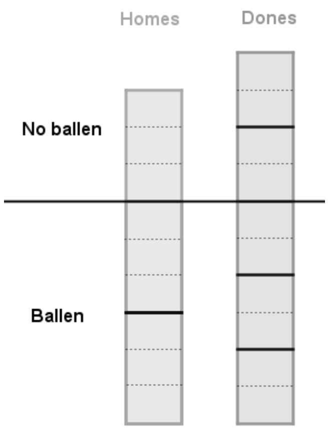
10. 112.

En l'enunciat cal posar $R = 40$ i aleshores treballem amb un conjunt de cinc nombres de mitjana 40 i mediana 42.
Com que han de ser positius i diferents els cinc nombres seran $0 < a < b < 42 < c < d$. Si volem que d sigui màxim, caldrà que fem els altres tres tan petits com sigui possible, i això és $0 < 1 < 2 < 42 < 43 < d$. Perquè la mitjana sigui 40 els cinc nombres han de sumar 200. De $1 + 2 + 42 + 43 + d = 200$ se'n dedueix $d = 112$.

Problemes "de propina", fora de concurs

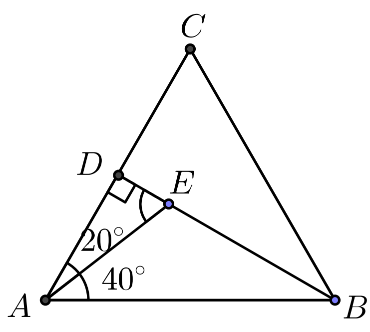
11. $\dfrac{7}{19}$.

Si dividim en 6 parts el nombre d'homes que ballen i també en 6 parts el nombre de dones que ballen, aquestes parts seran iguals. D'homes que no ballen n'hi ha la meitat que d'homes que ballen (1/3 enfront de 2/3) i per tant equivaldran en quantitat a tres de les parts anteriors. De dones que no ballen n'hi ha 2/3 respecte les dones que ballen (2/5 enfront de 3/5) i per tant equivaldran en quantitat a $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ parts. El total de parts en què, d'aquesta manera, hem dividit el conjunt dels assistents és 19. D'aquestes parts, 7 corresponen a les persones que no ballen i així s'obté la resposta indicada.



12. 70°.

En un triangle equilàter les bisectrius, mitjanes, mediatrius i altures coincideixen. Per tant el triangle ADE és rectangle, amb l'angle recte en D. Per altra banda, si l'angle en A queda dividit de manera que l'angle BAE és el doble de l'angle EAD, aquests dos angles seran, respectivament de $40°$ i $20°$. Per tant l'angle demanat del triangle ADE és de $180° - 90° - 20° = 70°$.



13. $\dfrac{1}{4}$.

L'aixeta que omple el dipòsit en 2 hores, en mitja hora aportarà un cabdal de 1/4 de dipòsit. El desguàs que el buida en 1 hora, en mitja hora buidarà 1/2 de dipòsit. Quan el dipòsit està exactament mig ple conté exactament 1/2 de dipòsit. Al cap de mitja hora, en les ocndicions de l'enunciat, contindrà 1/2 + 1/4 - 1/2 = 1/4 de dipòsit.