Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. 30 de gener de 2013.

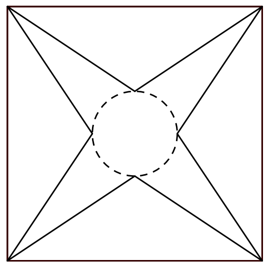
Problemes de la branca d'olivera

1. Tenim onze bosses, totes amb el mateix nombre de boles. De la primera bossa en traiem un cert nombre de boles; de la segona bossa, en traiem el doble que de la primera; de la tercera, el triple que de la primera i així successivament. Després d'això, a l'onzena bossa hi queden 3 boles i entre totes les bosses ara hi queden en total 2013 boles. Quantes boles hem tret de la primera bossa?

La solució d'aquest problema passa al problema 7 com a nombre K.

2. En la figura es veu una estrella de 4 puntes. Els quatre vèrtexs exteriors de l'estrella són els vèrtexs d'un quadrat. Els quatre vèrtexs interiors de l'estrella són quatre punts situats sobre un cercle de centre en el centre del quadrat, concretament en els extrems de diàmetres paral·lels als costats del quadrat.

Si l'àrea de l'estrella és un terç de l'àrea del quadrat i el costat del quadrat és de 12 unitats, quantes unitats fa el radi del cercle?



3. *Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre M que passa del problema 5.*

Si f és una funció definida en el conjunt dels nombres reals que compleix

$$f(x+y) = f(x \cdot y) \quad \text{i} \quad f(10) = M,$$

quant és $f(40)$?

4. Quina és la mitjana de tots els nombres de la forma

$$a + 2b + 3c + 4d$$

on $abcd$ recorre el conjunt de totes les permutacions de les xifres del número 2013?

La suma de les xifres de la resposta d'aquest problema passa com a valor C al primer repte (problema 9).

Problemes del colom de la pau

5. Si a, b, c són nombres enters positius, $a > b > c$, que compleixen

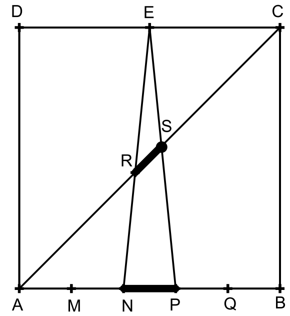
$$a^3 + b^4 + b^5 + c^6 + c^7 + c^8 + c^9 = 2013,$$

quin és el valor de $a - b - c$?

La solució d'aquest problema s'ha de passar al problema 3 com a nombre M.

6. Hem dividit el costat AB d'un quadrat en cinc parts iguals. Hem unit els punts N i P que determinen la part central amb el punt mitjà de l'altre costat, E. Estudieu en quines raons queda dividida la diagonal AC pels dos segments que hem dibuixat.

En concret al formulari de resposta haureu d'escriure només el valor de la raó de distàncies de la part central respecte la diagonal, és a dir $\frac{RS}{AC}$.



---

7. *Per resoldre aquest problema cal un nombre K que passa del problema 1.*

La Maria, l'Antoni i en Biel han participat en una cursa popular i han arribat en aquest ordre a la meta. La Maria ha arribat justament en la posició mediana de totes les persones participants. Entre la Maria i l'Antoni han arribat tantes persones com més endarrera que en Biel. Més endavant que l'Antoni han arribat a la meta 2013 persones i entre l'Antoni i en Biel han arribat a la meta K persones. Quantes persones han participat en la cursa?

---

8. Una funció f definida en el conjunt dels nombres reals compleix $f(2013) = 7$ i, per a tot valor de n, $f(n+1) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}$
Com que avui és dia 30, calculeu $f(30)$.

El denominador de la resposta d'aquest problema passa com a valor L al problema 9.

Reptes finals

Per trobar la resposta numèrica del problema 9 cal conèixer el valor de dos nombres C i L que passen dels problemes 4 i 8.

9. La família d'en Lluís s'han ajuntat per esmorzar.
Cadascuna de les persones ha pres la mateixa quantitat de cafè amb llet. Tots s'han posat cafè i llet però no tots han omplert la seva tassa amb la mateixa proporció de cafè i llet.
En Lluís constata que ell s'ha posat $1/L$ del total de llet i $1/C$ del total de cafè.
Quantes persones s'han ajuntat per esmorzar?

Si r és la solució d'aquest problema, cal passar a l'exercici següent el valor $S = r + 1$.

---

10. Calculeu totes les solucions reals de l'equació

$$(1+x)^4 - S(1-x)^4 = (1-x^2)^2.$$

Reptes "de propina", fora de concurs

11. Quants nombres de 14 xifres hi ha que estiguin formats només per les xifres 1 i 2, que no tinguin dues xifres 2 juntes i que siguin divisibles per 18?

---

12. Quina és la longitud del costat d'un triangle equilàter per al qual existeix un punt interior que és a distàncies 4, 5 i 7 del vèrtexs del triangle?

---

13. Quin és el residu de la divisió de

$$1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013} + 5^{2013} + 6^{2013} + 7^{2013}$$

per 7?

Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. Gener de 2013.

Participació i resultats

La vint-i-unena edició dels *Problemes a l'esprint* per a alumnes de Batxillerat es va desenvolupar el dia 30 de gener de 2013.
Van participar 33 equips, de centres de Catalunya i el País Valencià. En la inscripció es van fer constar més de 550 alumnes participants. 12 equips van enviar totes les respostes correctes.
2 equips també van enviar la resposta als reptes fora de concurs.

Centres més destacats

L'equip més destacat en aquesta convocatòria va ser el del centre
Aula Escola Europea, de Barcelona (*)
que va enviar totes les respostes correctes en un temps de concurs inferior a una hora.
El segon equip més ràpid va ser el del centre
Institut Jaume Vicens Vives, de Girona (*) que va enviar totes les respostes correctes, al primer intent, en un temps d'una hora i 10 minuts.
També van enviar totes les respostes correctes en menys d'una hora i mitja
Institut Montserrat, de Barcelona
Institut Samuel Gili i Gaya, de Lleida

Altres equips que van encertar totes les respostes

IES l'Arabí, d'Alfàs del Pi
IES Bellaguarda, d'Altea
Escola Betània-Patmos, de Barcelona
Institut Santa Eugènia, de Girona (*)
Montessori-Palau, de Girona
Institut Ramon Coll, de Lloret de Mar
Institut de Sant Quirze del Vallès
Institut Narcís Oller, de Valls.

Els tres centres indicats amb (*) són els que van enviar les respostes correctes als "reptes de propina".

Problemes a l'esprint

Equips de batxillerat. Gener 2013.

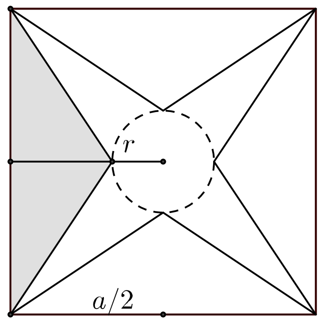
Les solucions

1. **36 boles**.

   Indiquem com b el nombre de boles inicial de cada bossa.
   Indiquem com t el nombre de boles que traiem de la primera bossa, que és el que es demana.
   A l'onzena bossa queden $b - 11t = 3$ boles.
   Entre totes les bosses queden $b - t + b - 2t + ... + b - 11t = 2013$, és a dir $11b - 66t = 2013$ i, simplificant, $b - 6t = 183$.
   Es dedueix de seguida que $t = 36$.

2. **2 unitats**.

   Amb caràcter general es pot deduir que, si el costat del quadrat és a, el radi del cercle central és $\frac{a}{6}$ i així ho raonem tot seguit.
   Si l'àrea de l'estrella és $\frac{1}{3}$ de l'àrea del quadrat, aleshores la suma de les àrees dels quatre triangles iguals exteriors a l'estrella a serà $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de l'àrea del quadrat i, doncs, l'àrea de cadascun d'aquests triangles, com el que es veu ombrejat a la figura, serà $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ de l'àrea del quadrat, $\frac{a^2}{6}$.

   Ara bé, com que la base d'un d'aquests triangles és a i l'altura és $\frac{a}{2} - r$ l'àrea serà $\frac{a(a/2-r)}{2} = \frac{a(a-2r)}{4} = \frac{a^2}{6}$ i d'aquí (tenint en compte que $a > 0$) es dedueix que $r = \frac{a}{6}$.

3. $f(40) = 4$.

   Aplicant la fórmula que compleix la funció per als valors $x, 1$ obtenim $f(x+1) = f(x \cdot 1) = f(x)$.
   Per tant, com que passa el valor $M = 4$ i tenim $f(10) = 4$ la igualtat anterior ens diu $... = f(8) = f(9) = f(10) = f(11) = ... = f(40) = 4$ i, podem dir més: per a tots els nombres enters, n, es compleix que $f(n) = 4$.

4. **La mitjana és 15.**.

   Hi ha 24 permutacions *abcd* de les xifres de 2013.
   Si ens fixem en la primera posició hi trobem 6 vegades l'1, 6 vegades el 2, 6 vegades el 3 i 6 vegades el 0. La mitjana de els xifres que ocupen el primer lloc del conjunt de permutacions és doncs $\dfrac{6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 0}{24} = \dfrac{3}{2}$.
   Per la mateixa raó, la mitjana de les xifres que ocupen el segon lloc, b és igualment $\dfrac{3}{2}$, la mitjana de les possibles c i la mitjana de les d són també $\dfrac{3}{2}$.
   Per tant la mitjana de $a + 2b + 3c + 4d$ és $\dfrac{3}{2} + 2 \cdot \dfrac{3}{2} + 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 15$.

Problemes del colom de la pau

5. $a-b-c=4$.

Si a, b, c són nombres enters $a>b>c>0$, que compleixen

$$a^3+b^4+b^5+c^6+c^7+c^8+c^9=2013,$$

començarem per estudiar el valor que pot tenir c. Com que $3^9>2013$ se'n dedueix que c només pot valer 1 o 2.

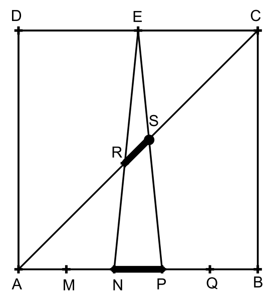
Si $c=2$ s'ha de complir $a^3+b^4+b^5=1053$. Pot ser $b=3$ perquè queda $a^3=729$ que ens porta a $a=9$. No pot ser $b\geq 4$ perquè en aquest cas seria $b^4+b^5>2013$.

Si $c=1$ s'ha de complir $a^3+b^4+b^5=2009$. Si posem $b=2$ o $b=3$ aleshores $2009-b^4-b^5$ no és un cub perfecte. Si posem $b=4$ resulta $a^3=729$ que ens porta a $a=9$. No pot ser $b\geq 5$ perquè tindríem $b^4+b^5>2009$.

Per a les dues solucions, $a=9$, $b=3$, $c=2$ i $a=9$, $b=4$, $c=1$ reuslta $a-b-c=4$.

---

6. La raó és $\dfrac{10}{99}$.



Indiquem com c el costat del quadrat. El triangle CES i el triangle APS són semblants. A partir de $\frac{CS}{AS}=\frac{CE}{AP}=\frac{c/2}{3c/5}=\frac{5}{6}$ es dedueix que CS té una longitud de $\frac{5}{11}$ de la diagonal del quadrat.

Anàlogament, basant-nos en la semblaça dels triangles CER i ANR deduïm $\frac{AR}{CR}=\frac{AN}{CE}=\frac{2c/5}{c/2}=\frac{4}{5}$ i, doncs, AR són $\frac{4}{9}$ de la diagonal. Per tant RS serà $1-\frac{4}{9}-\frac{5}{11}=\frac{10}{99}$ de la diagonal AC.

Un altre camí de solució pot arribar a partir de la geometria analítica.

Podem posar, sense perdre generalitat, que el costat del quadrat és 10, que $A=(0,0)$, $B=(10,0)$ i $D=(0,10)$.

Escrivim les equacions de els rectes EM i EP, fem la intersecció amb la diagonal, que és la recta $y=x$ i trobem els punts $R=(\frac{40}{9},\frac{40}{9})$ i $S=(\frac{60}{11},\frac{60}{11})$. Pel teorema de Tales la raó entre RS i la diagonal és la mateixa que entre la diferència d'abscisses i el costat, és a dir $\frac{60/11-40/9}{10}=\frac{10}{99}$.

---

7. 2709 persones.

Si indiquem com d el nombre de persones que han arribat davant de la Maria i com p el nombre de persones que han arribat entre la Maria i l'Antoni i també més endarrere que en Biel, com que entre l?Antoni i en Biel han arribat $K=36$ persones, pel fet de ser la Maria la que ha ocupat la posició mediana i sense oblidar l'Antoni i en Biel tenim: $d=p+1+36+1+p=2p+38$. L'enunciat també ens diu que $d+1+p=2013$. De les dues equacions anteriors es dedueix $p=658$, $d=1354$ i, per tant, el nombre de participants, sense oblidar la Maria, és $1354+1+1354=2709$.

---

8. $f(30)=3/4$.

Si posem $f(1)=a$ serà $f(2)=\dfrac{a-1}{a+1}$, $f(3)=\dfrac{\frac{a-1}{a+1}-1}{\frac{a-1}{a+1}+1}=-\dfrac{1}{a}$, $f(4)=\dfrac{\frac{-1}{a}-1}{\frac{-1}{a}+1}=-\dfrac{a+1}{a-1}$ i amb un nou càlcul veiem que $f(5)=a$ i, doncs, hem establert una cadència per als valors de la funció que són imatge de nombres naturals, que es van repetint en grups de 4.

Com que el residu de 2013 dividit per 4 és 1, aleshores serà $f(2013)=7=f(1)=a$.

Com que el residu de 30 dividit per 4 és 2, serà $f(30)=f(2)=\dfrac{7-1}{7+1}=\dfrac{3}{4}$.

Reptes finals

9. 5 persones.

Escrivim n el nombre de persones, c el total del cafè que prenen, i t la quantitat que pren cadascú.
Per l'enunciat i els nombres que passen d'altres problemes, en Lluís pren $\frac{1}{6}$ del total del cafè i $\frac{1}{4}$ del total de la llet.
Com que el total de la llet és $n \cdot t - c$, la llet que ha pres en Lluís és $\frac{n \cdot t - c}{4}$.
El cafè que ha pres en Lluís és $\frac{c}{6}$.
La tassa d'en Lluís és, doncs, $\frac{c}{6} + \frac{n \cdot t - c}{4} = t$. Aïllem c i simplifiquem i obtenim $c = (3n - 12) \cdot t$.
Aleshores:

- No pot ser $n < 4$ perquè el total de cafè sortiria negatiu.
- No pot ser $n = 4$ perquè $c = 0$ voldria dir que tothom només s'hauria posat llet.
- Sí que pot ser $n = 5$. Resulta $c = 3t$ i en Lluís s'ha posat a la tassa la mateixa quantitat de cafè que de llet, $t/2$.
- No pot ser $n = 6$ perquè tothom s'hauria posat només cafè.
- No pot ser $n > 6$ perquè resultaria que la quantitat de cafè ultrapassa el total de n tasses.

---

10. L'equació té 2 solucions relas: $x = 2 - \sqrt{3}$ i $x = 2 - \sqrt{3}$.

En l'enunciat cal posar $S = 6$.
Com que $x = 1$ no és solució, si en el segon terme tenim en compte la fórmula de diferència de quadrats i dividim l'equació per $(1 - x)^4$, obtenim una equació equivalent a la donada, que és

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4 - 6 = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2.$$

Ara posem $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = z$, resolem $z^2 - z - 6 = 0$ i obtenim $z = 3$, $z = -2$. Només tindrem solucions reals de l'equació original per a $z = 3$. Haurà de ser $\frac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{3}$ i d'aquí obtenim les dues solucions $x = 2 - \sqrt{3}$ i $x = 2 - \sqrt{3}$.

Problemes "de propina", fora de concurs

11. 120 nombres.

Perquè un nombre sigui divisible per 18 ha de ser parell. En el nostre cas, doncs, haurà d'acabar en 2 i, com que no hi poden haver dos 2 seguits, acabarà en 12.
Perquè sigui múltiple de 9 la suma de les xifres haurà de ser un múltiple de 9. Com que ha de ser de 14 xifres, cap d'elles 0, l'esmentada suma no podrà ser 9. Sí que pot ser 18. No pot ser 27 perquè per a un nombre de 14 xifres format només per 1 i 2 hauria d'haver-hi exactament tretze 2 i un 1 i aleshores hi hauria dues xifres 2 seguides.
Així doncs busquem uns nombres de 12 xifres que les seves xifres sumin 15, que afegint-los al final les xifres 12 ens donin els nombres de l'enunciat. Aquests nombres que busquem han de tenir nou 1 i tres 2 situats, aquests, en llocs no consecutius.

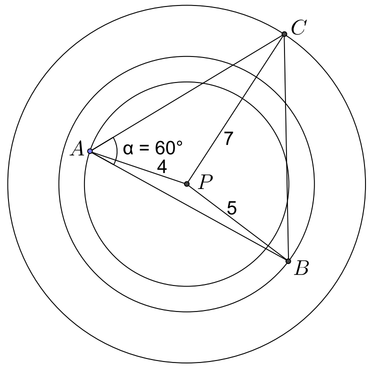
Quantes combinacions hi ha dels nombres de l'1 al 12 agafats de 3 en 3 –les que serveixen per tirar en quins llocs posarem els tres 2– en les quals no hi apareguin dos nombres consecutius?

Es pot veure que si $\{a,b,c\}$ és una combinació com les que acabem d'esmentar, escrita amb $a<b<c$, aleshores $\{a,b-1,c-2\}$ és una combinació qualsevol dels nombres de l'1 al 10 agafats de 3 en 3. I recíprocament.
Així doncs la resposta al problema és $\binom{10}{3}=120$.

---

12. $\sqrt{45+24\sqrt{2}}$ **= 8,9 unitats**.

Per fer la construcció podem procedir així: en primer lloc amb centre en un punt P, que serà el punt innterior al triangle, dibuixem tres circumferències C_4, C_5 i C_7 de radis respectius 4, 5 i 7. Sobre la circumferència C_4 triem un punt A qualsevol. Observem que una rotació de centre A i angle $60°$ transformarà el vèrtex B en el vèrtex C. Per tant, si fem una rotació en sentit antihorari de centre A i angle $60°$ de la circumferència C_5 i busquem la intersecció de la circumferència transformada amb la circumferència C_7, un dels punts d'intersecció ens dóna el vèrtex C.



(L'altre punt que obtenim serviria per construir un triangle que té els vèrtexs a distàncies 4, 5 i 7 del punt P, però de manera que P és exterior al triangle). Després apliquem una rotació al punt C, en sentit horari, de centre A i angle $60°$ i obtenim el tercer vèrtex del triangle equilàter buscat. Si comencem per una rotació en sentit horari de la circumferència C_5 obtindrem una altra solució, simètrica de l'anterior respecte la recta AP. Les mateixes solucions obtindríem si canviéssim el paper de les circumferències C_5 i C_7 en la construcció. Si feu aquesta construcció amb el GeoGebra veureu que el costat del triangle, arrodonit al primer decimal com es demanava, és de 9,8 unitats.

La idea anterior, traduïda a l'analítica, ens pot donar una manera de resoldre numèricament el problema, fins i tot una mica més directament. Prenem $P=(0,0)$ i $A=(-4,0)$. Prenem $B=(x,y)$ sobre C_5 i, per tant $x^2+y^2=25$. Apliquem una rotació de centre centre $A=(-4,0)$ al punt B i obtenim $C=(x\cos(60°)-y\sin(60°)-4, x\sin(60°)+y\cos(60°))$. Imposem que aquest punt pertanyi a la circumferència C_7 és a dir $((x\cos(60°)-y\sin(60°)-4)^2+(x\sin(60°)+y\cos(60°))^2=49$ i ja tenim dues equacions de segon grau que, com que en la segona s'eliminen els termes en xy podem resoldre (amb una mica de paciència o amb un calculador simbòlic). Calculem la distància de A al punt $B=(x,y)$ i obtenim la solució exacta indicada.

Encara una altra possibilitat analítica, pensant, això sí en les tres circumferències ja indicades. Fem $A=(-4,0)$. Posem un punt $B=(x,y)$ en la circumferència C_5, un punt $C=(u,v)$ en la circumferència C_7 i imposem que els tres costats del triangle ABC tinguin tots tres longitud L. Tenim les cinc equacions

$$\begin{aligned}
x^2+y^2&=25\\
u^2+v^2&=49\\
(x+4)^2+y^2&=L^2\\
(u+4)^2+v^2&=L^2\\
(x-u)^2+(y-v)^2&=L^2
\end{aligned}$$

Si resolem el sistema que formen, amb molta paciència o amb un calculador simbòlic i triem la resposta adequada, la que doni $L>7$, trobarem la resposta al problema.

---

13. El residu és 0.

Per cada nombre natural k, s'anomenen *residus potencials de k mòdul 7* els nombres que constitueixen la llista dels residus de les divisions per 7 de les potències k^n per a $n = 1, 2, 3, ...$ que, en tot cas, esdevé una llista periòdica. Donem tot seguit els valors que es van repetint.

- Els residus potencials de 1 mòdul 7, naturalment són tots 1.
- Els residus potencials de 2 mòdul 7 repeteixen cadencialment 2, 4, 1.
- Per a les potències de 3 es repeteixen els residus 3, 2, 6, 4, 5, 1.
- Per a les potències de 4 es repeteixen els residus 4, 2, 1.
- Per a les potències de 5, es repeteixen 5, 4, 6, 2, 3, 1.
- Per a les potències de 6 es repeteixen 6, 1.
- Per a les potències de 7 és clar que tots els residus són 0.

Aleshores el residu de la divisió per 7 de la suma $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$ s'obtindrà com el residu de la divisió per 7 de la suma dels residus dels sumands. Aquesta suma s'anirà repetint en grups de 6, així $\{1+2+3+4+5+6,\ 1+4+2+2+4+1,\ 1+1+6+1+6+6,\ 1+2+4+4+2+1,\ 1+4+5+2+3+6,\ 1+1+1+1+1+1\}$ és a dir $\{21, 14, 21, 14, 21, 6\}$ i els residus de l'expressió de l'enunciat aniran, doncs, repetint cadencialment $\{0, 0, 0, 0, 0, 6\}$. Veiem doncs que per a tots els valors de n el residu és 0, excepte per a n múltiple de 6 que el residu és 6. Com que 2013 no és múltiple de 6 el residu demanat és 0.