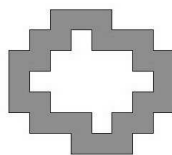


## Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2011

### Problemes de la branca d'olivera

1. En la figura adjunta, tots els angles són angles rectes i els costats tenen tots una longitud d'una unitat o bé de 2 unitats o bé de 3 unitats. Quina és, en unitats quadrades, l'àrea de la regió acolorida?

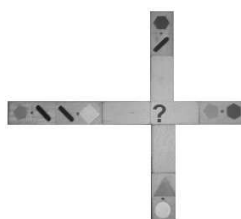
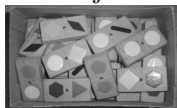


*La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 8 com a nombre P.*

2. Un joc de dòmino té figures geomètriques,



en comptes dels punts que hi ha en el joc de dòmino original. Del conjunt de les 28 fitxes d'aquest joc,

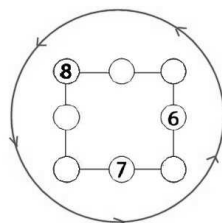


la Maria n'ha fet servir nou, en cap de les quals no apareix el rombe fosc, i les ha situat en forma de creu, com es veu a la figura de la dreta.

La Maria ha posat les fitxes amb l'única condició que siguin iguals els dibuixos de les caselles que es toquen de fitxes diferents. (i això ho ha fet tant si se'n toquen dues com més de dues.)

Una vegada situades les fitxes, en Norbert n'ha tombat quatre (respectant la condició de coincidència de dibuixos en caselles que es toquen). Quina figura hi ha a sota de l'interrogant?

3. La Joaneta vol posar els nombres enters de l'1 al 8, sense repetir-ne cap, als cercles de la figura, de manera que la suma dels nombres en cada costat del quadrat sigui 13. En Joan li ha dit, "apa! jo ja t'he posat el 6, el 7 i el 8. Ho podràs acabar?"



Estudieu si la Joaneta podrà acabar de posar els nombres de l'1 al 5 o no.

---

*Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 4 cal un nombre  $M$  que passa del problema 5.*

4. Quatre persones es reparteixen així una certa quantitat d'euros:
- El primer rep la meitat dels diners més  $M$  €.
  - Després, el segon rep la meitat del que queda més  $M$  €.
  - Després, el tercer rep la meitat del que queda més  $M$  €.
  - Aleshores el quart rep la meitat del que quedava i, vist que després ja només quedaven els últims  $M$  €, també se'ls enduu el quart.
- I així, és clar, ja s'han repartit exactament tots els diners. Quants euros s'han repartit?

*Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor  $A$  la resposta numèrica d'aquest problema.*

---

## Problemes del colom de la pau

---

5. Demà és l'aniversari de l'oncle Sam, que farà 101 anys, i diu: "Mireu, demà la meua edat passarà de ser nombre quadrat perfecte a ser un nombre primer." Tot seguit us pregunta: "Quantes vegades ja m'ha passat això mateix, anteriorment, al llarg de la meua vida?"

*La resposta s'ha de passar al problema 4, com a  $M$ .*

---

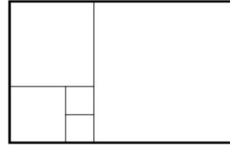
6. L'Albert va treballar un cert nombre de dies. La quantitat d'euros que va guanyar diàriament (cada dia la mateixa) coincideix amb el nombre de dies que va treballar. La Berta va treballar dos dies menys que l'Albert però, en canvi, va guanyar 2 € més per dia que l'Albert.
- Qui va guanyar més diners?
  - Quina va ser la diferència de guanys entre els dos?
- 

7. La Sara té un gos-robot situat al punt  $(4,0)$  d'un sistema de coordenades mirant cap a l'Est (eixos perpendiculars, l'eix de les  $x$  va d'Oest negatiu-cap a Est positiu-) i l'ha programat amb les instruccions següents:
- 1r moviment: avança una unitat cap a l'Est i ves al punt  $(5,0)$
  - Moviments posteriors: si estàs situat al punt  $(x,y)$ , aleshores fes el residu de dividir  $x - y$  per 4 i mou-te així:
    - Si és 0 o 1 gira 90 cap a l'esquerra i avança una unitat
    - Si és 2 o 3 gira 90 cap a la dreta i avança una unitat
- A quin punt arribarà el gos-robot just després del seu 50è moviment?
-

---

*Per al problema 8 es necessita un nombre  $P$ ,  
que passa del problema 1.*

8. La figura de la dreta està formada per cinc quadrats. Quina és, en  $c^2$ , l'àrea de la figura si el perímetre exterior (marcat més gruixut) és de  $P$  cm?



*Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor  
 $B$  la resposta d'aquest problema, sense unitats.*

---

---

### Reptes finals

---

*Per resoldre aquest problema cal conèixer nombres  
 $A$  i  $B$  que passen dels problemes 4 i 8.*

9. Un cotxe ha fet un viatge, al llarg del qual ha circulat  $A$  km per una carretera a una velocitat mitjana de 60 km/h i  $B$  km per autopista a una velocitat mitjana de 100 km/h. Per tornar ha de fer un camí més llarg, per carretera; triga 3 hores i fa el viatge a la mateixa velocitat mitjana que la de l'anada comptant tot el camí. Quants quilòmetres ha fet a la tornada?

10. La figura següent (que no està pas dibuixada "a escala") mostra un rectangle gran que s'ha dividit en quatre rectangles més petits per línies paral·leles als costats. Coneixes les àrees de tres dels rectangles petits. Quina és l'àrea del rectangle marcat amb un interrogant?

28	?
42	30

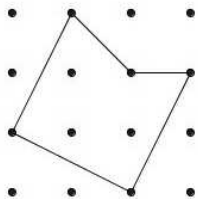
---

---

## Reptes voluntaris

---

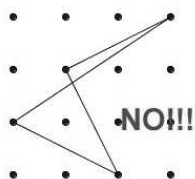
11. Volem escollir set nombres enters positius diferents que tinguin per mitjana 7 i per mediana també 7. Quin és el valor màxim que pot tenir el nombre més gran que escollim?
12. La figura mostra un pentàgon que hem fet amb els vèrtexs en punts dun geoplà que només té els punts que pots veure a la figura. Adoneu-vos que cap dels segments que formen els costats del pentàgon no conté cap altre punt del geoplà que no sigui vèrtex del polígon.

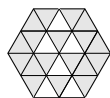


Quin és el màxim nombre de costats que pot tenir un polígon amb vèrtexs en els punts del geoplà i que compleixi també la condició que acabem de dir?

---

**Nota:** podeu considerar polígons convexos o còncaus (com el de la figura anterior) però **NO** els que de vegades sen diuen polígons estrellats (que potser vosaltres no penseu que siguin un polígon)





# Problemes a l'esprint

---

---

## Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març 2011

---

### Participació i centres destacats

---

Aquesta edició dels **Problemes a l'esprint** celebrada el dia 23 de març de 2011 va representar un rècord de participació. Es van inscriure 90 equips, de 76 centres, d'Andorra, Catalunya, el País Valencià i les illes Balears, cosa que representa més de 1700 alumnes.

Van enviar totes les respostes correctes un total de 26 equips.

Gràcies a tothom que va participar o va impulsar la participació!

---

### Centres més destacats

Els **equips guanyadors** de l'activitat, declarats ex aequo, són els del centres

- Col·legi Cor de Maria, de Valls (Alt Camp) i
- Institut Samuel Gili i Gaya, de Lleida (Segrià)

que van tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de concurs aproximat de tres quarts d'hora. També van enviar la resposta correcta a reptes suplementaris, fora de concurs..

**Pòdium** de l'activitat, també ex-aequo

- IES Vicent Castell Domènech, de Castelló de la Plana (Plana Alta) i
- Institut Santa Eugènia, de Girona (Gironès)

que van enviar totes les respostes correctes, al primer intent, amb un temps de concurs inferior a una hora i també van respondre correctament els dos reptes suplementaris.

---

### **Altres equips que van encertar totes les respostes**

(per ordre alfabètic del nom del municipi)

(s'indiquen amb (\*) els centres que han enviat les respostes als reptes suplementaris, fora de concurs)

En un temps inferior a una hora i mitja:

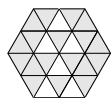
IES Bellaguarda d'Altea (Marina Baixa) (\*)  
Col·legi Jardí de Granollers (Vallès Oriental) (\*)  
Institut El Cairat d'Esparreguera (Baix Llobregat)  
i Institut de Sant Quirze del Vallès (Vallès Occidental) (\*)

La llista d'equips amb totes les respostes correctes es completa amb:

Institut Badalona VII de Badalona (Barcelonès) (\*)  
Col·legi Calassanç, de Barcelona (Barcelonès)  
IES Violant de Casalduch de Benicàssim (Plana Alta) (\*)  
Institut Puig Cargol de Calonge-Sant Antoni (Baix Empordà) (\*)  
Institut de Corbera de Llobregat (Baix Llobregat)  
Institut de Deltebre (Baix Ebre)  
IES número 3 de Dénia (Marina Alta) (\*)  
Institut Mediterrània d'El Masnou (Maresme)  
Institut Jaume Vicens Vives de Girona (Gironès) (\*)  
Institut Celestí Bellera de Granollers (Vallès Occidental) (\*)  
IES Pau Casesnoves d'Inca (Mallorca septentrional) (\*)  
Institut el Pedró de L'Escala (Alt Empordà)  
Institut Ramon Coll i Rodès de Lloret de Mar (La Selva)  
Institut Pius Font i Quer de Manresa (Bages) (\*)  
Institut Montserrat Miró i Vilà de Montcada (Vallès Occidental)  
Col·legi Regina Carmeli de Rubí (Vallès Occidental) (\*)  
Institut Jonqueres de Sabadell (Vallès Occidental) (\*)  
Institut Sabadell de Sabadell (Vallès Occidental) (\*)

---

---



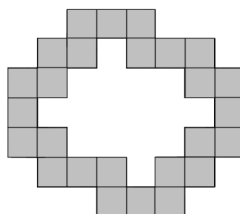
## Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de 1r i 2n d'ESO. Març de 2011

### Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **26**.

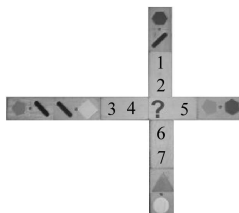
Podeu veure a la figura que la regió queda descomposta en 26 quadrats unitaris, de costat 1 unitat i àrea 1 unitat quadrada.



*Passa P = 16 al problema 8*

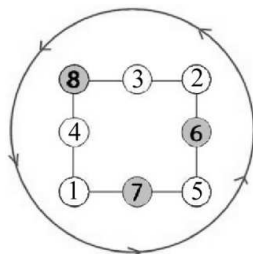
2. Solució: **Un triangle**.

Com que no hi ha cap rombe, com a peça **1·2** s'hi podrien posar, a priori, **segment·segment** o bé **segment·triangle**. La primera d'aquestes dues possibilitats no pot pas ser perquè aleshores a **?·5** hi hauria d'anar **segment·triangle** i aquest triangle no concordaria amb un pentàgon que hi ha situat a la fitxa de la dreta. En canvi, és possible que a **1·2** hi vagi la peça **segment·triangle** perquè aleshores tindrem que **?·5 = triangle·pentàgon**, **3·4 = quadrat·triangle** i **6·7 = triangle·triangle**.



3. Solució: **84175623**.

En els dos costats que conflueixen en el vèrtex on hi ha el 8 les dues xifres de cada costat han de sumar 5; per tant seran necessàriament els dos conjunts  $\{3, 2\}$  i  $\{4, 1\}$ . Només queda el 5 que haurà d'anar, doncs, al vèrtex de baix a la dreta, a tocar amb el 6 i amb el 7. I a partir d'aquí ja és ràpid col·locar els altres nombres.



---

*Del problema 5 passa  $M = 4$*

**4. Solució: 120.**

La quarta persona rep "la meitat del que quedava més els 4 € últims que quedaven". Per tant, com que després de treure'n la meitat en queda una altra meitat, a la quarta persona, després d'haver donat diners al tercer, li arribaven 8 €.

Quan treia diners la tercera persona, doncs, abans de donar-li els "4 € més" quedaven  $8 + 4 = 12$  € i això era la meitat del que li havia arribat a ell: serien 24 €.

Raonant de la mateixa manera, quan treia diners la segona persona, abans dels "4 € més" quedaven  $24 + 4 = 28$  €, la meitat de la quantitat que li havia arribat a ell: serien 56 €.

Finalment, mentre treia diners el primer abans dels "4 € més" quedaven  $56 + 4 = 60$  € és a dir que al principi hi havia el doble d'això, 120 €.

*Passa  $A = 120$  al problema 9*

---

## Colom de la pau. Solucions

---

**5. Solució: 4.**

Els quadrats perfectes més petits que 100 (atenció! que l'enunciat diu "anteriorment") són 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81. D'aquests els que compleixen l'enunciat són 1, 4, 16 i 36 perquè 2, 5, 17 i 37 són nombres primers. Els altres no ho compleixen perquè 10, 26, 50, 65 i 82 no són pas nombres primers.

*Passa  $M = 4$  al problema 4.*

---

**6. Solució: Guanya més l'Albert; 4€..**

Un bon exemple de l'ús fonamental de la notació algebraica. Si indiquem com  $n$  el nombre de dies que ha treballat l'Albert, com que segons l'enunciat guanya  $n$  € per dia, els diners totals que ha de cobrar l'Albert pel seu treball de tots els dies són  $n \cdot n = n^2$  €.

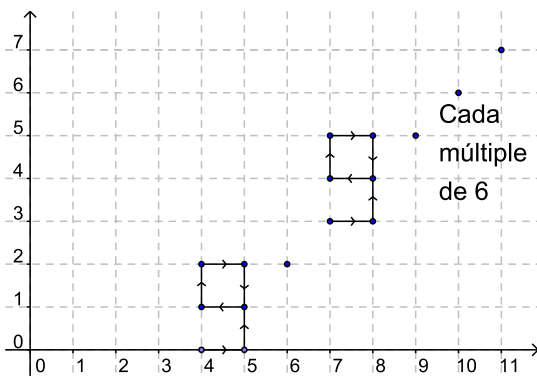
En canvi la Berta guanya per dia  $n + 2$  € però treballa  $n - 2$  dies; els diners totals que li corresponen són  $(n - 2) \cdot (n + 2)$  i, per una fórmula fonamental, això és igual a  $n^2 - 4$  €, és a dir 4 € menys que el total de l'Albert.

---



**7. Solució: Punt (13,9).**

Si analitzem un per un els sis primers moviments veurem que es descriu un itinerari com el que podeu veure a la figura següent porta del punt (4, 0) al punt (5, 1).



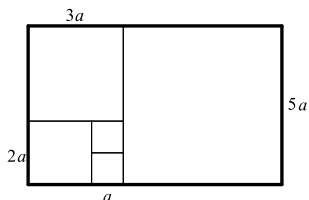
Observeu ara que en el punt (5, 1) es compleix que  $5 - 1 = 4$  i per tant el robot girarà a l'esquerra, avançarà cap a l'est i "copiarà" l'itinerari anterior. Així després de 12 moviments el robot arribarà al punt (6,2). Torna a ser  $6 - 2 = 4$  i es tornarà a repetir el circuit. I així successivament, cada 6 moviments arribarà a un punt de la forma  $(n, n - 4)$  i com que sempre  $n - (n - 4) = 4$  s'anirà repetint el cicle de moviments. A la figura teniu dibuixat el que comença en (7, 3).

Així doncs després del moviment 48 el robot serà al punt (12, 8), en el moviment 49 girarà a l'esquerra i avançarà fins al (13,8) i en el 50è moviment girarà a l'esquerra i avançarà fins al (13,9).

*Del problema 1 passa  $P = 26$*

**8. Solució: 40.**

Si indiquem com  $a$  el costat dels quadrats més petits que apareixen a la figura, els costats dels altres quadrats seran  $2a$ ,  $3a$  i  $5a$ . El perímetre del rectangle és  $26a = 26$  cm i, per tant  $a = 1$  cm. Els costats del rectangle són  $8a$  i  $5a$  i per tant l'àrea serà  $8 \cdot 5 = 40$  cm<sup>2</sup>.



*El valor  $B = 40$  passa al problema 9.*

---

---

## Solucions als reptes finals

---

*Dels problemes 4 i 8 passen  $A = 120$  i  $B = 40$*

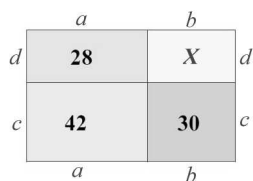
**9. Solució: 200.**

Per als 120 km de l'anada a mitjana de 60 km/h ha trigat 2 hores. Per als 40 km a mitjana de 100 km/h, és a dir 100 km cada 60 min, una proporcionalitat ens diu que haurà trigat 24 minuts. En total, doncs en 144 minuts ha fet 160 km i si a la tornada manté aquesta mateixa velocitat mitjana podem fer una altra proporcionalitat i veurem que en 3 hores (180 min) fa 200 km.

---

**10. Solució: 20.**

Amb les lletres que teniu a la figura de la dreta, mirant les àrees dels rectangles petits, us podeu adonar que  $a \cdot d \cdot b \cdot c = 28 \cdot 30$  i que  $a \cdot c \cdot b \cdot d = 42 \cdot X$ . Com que les dues expressions anteriors són iguals, se'n dedueix que  $X = \frac{28 \cdot 30}{42} = 20$ .



Tot i que l'enunciat no ho deia, si algú s'ha imaginat que calia que els costats fossin nombres enters, també es pot arribar a una solució i així comprovem que tot i que  $X$  té un valor fix, hi ha diferents mesures dels costats que compleixen l'enunciat.  $a$  i  $c$  han de ser divisors de 42 amb  $a \cdot c = 42$ ,  $a$  ha de ser divisor de 28 i  $c$  ha de ser divisor de 30. Això ho compleixen  $a = 7, c = 6$  que ens dóna  $b = 5, d = 4, X = 20$  i també  $a = 14, c = 3$  d'on  $b = 10, d = 2, X = 20$ . Amb nombres enters hi ha aquestes dues possibilitats; si no imposem aquesta condició n'hi ha infinites, però per a totes elles  $X = 20$

---

---

## Solucions als reptes voluntaris

---

### 11. Solució: 19.

La llista ordenada dels set nombres serà  $\{a, b, c, 7, e, f, g\}$ . Si busquem el valor més gran per a  $g$  de manera que la mitjana sigui 7, aleshores  $a, b$  i  $c$  hauran de tenir el valor més petit possible. Com que han de ser enters positius diferents aquests valors seran  $a = 1, b = 2$  i  $c = 3$ . També a  $e$  i a  $f$  els haurem de donar els valor més petits possible, que seran  $e = 8, f = 9$ . Com que si la mitjana és 7 la suma de tots els nombres del conjunt ha de ser 49, tindrem  $1 + 2 + 3 + 7 + 8 + 9 + g = 49$  i d'ací  $g = 19$ .

---

### 12. Solució: 16.

La figura mostra un polígon de 16 costats (i 16 vèrtexs, és clar) que compleix la condició de l'enunciat, i com que cap punt del geopla pot ser alhora dues vegades vèrtex del polígon que busquem, 16 és el màxim nombre de vèrtexs que podem trobar per al nostre polígon.

