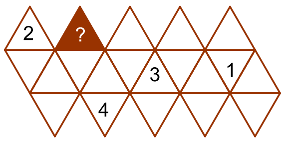
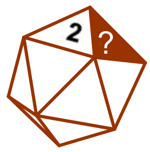
Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de Batxillerat. Gener 2011

Problemes de la branca d'olivera

1. La figura mostra el desplegament d'un icosàedre, on hi ha quatre cares numerades.





Volem numerar les cares de manera que, una vegada confegit l'icosàedre, les cinc cares que concorren en cada vèrtex estiguin numerades amb els números 1, 2, 3, 4, i 5. És a dir, en cada vèrtex, una cara amb cada número.
Quin nombre ha d'anar a la cara marcada amb el signe d'interrogació?

La solució del problema 1 s'ha de passar al problema 8 com a nombre H.

2. Si x, y són dos nombres reals diferents que compleixen

$$2011x - \frac{2012}{x} = 2011y - \frac{2012}{y},$$

quin és el valor de $x \cdot y$?

3. $ABCDE$ es un pentàgon del pla que té els vèrtexs, en un sistema de coordenades cartesianes rectangulars, en els punts de coordenades enteres $A(0,0), B(11,0), C(11,2), D(6,2)$ i $E(0,8)$. El volem dividir en dos polígons d'igual àrea mitjançant una recta de la forma $x = k$. Calcula el valor de k i comprova que el pots escriure com $k = a + b\sqrt{c}$ per a tres nombres enters a, b, c. Al formulari de resposta hauràs d'indicar els valors de a, b, c que corresponen al valor de c més petit possible.

Per tal de trobar la resposta numèrica del problema 4 necessiteu un nombre T que us han de passar des del problema 5.

4. Calculeu el valor mínim que pren la funció $f(x) = x^2 - Tx + (T+2)$ en el conjunt de nombres reals x que compleixen $x^2 + Tx + (T-1) \leq 0$.

Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor M la resposta numèrica d'aquest problema.

Problemes del colom de la pau

5. Quatre nombres enters positius a, b, c, d compleixen

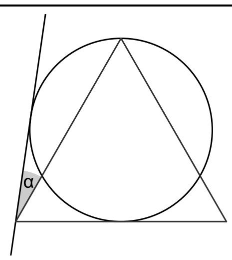
$$abcd + abc + bcd + cda + dab + ab + bc + cd + da + ac + bd + a + b + c + d = 209.$$

Quin és el valor de $a + b + c + d$?

La resposta s'ha de passar al problema 4, com a T.

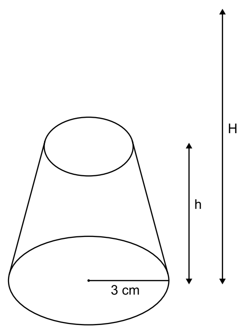
6. Una funció f definida en el conjunt dels nombres enters positius compleix: $f(1) = 1$ i, per a qualsevol valor nombre enter positiu n, $f(2n) = f(n) + 1$ i $f(2n+1) = f(2n)$. Calcula el valor de f(2011).

7. Dibuixem un triangle equilàter i una circumferència que té com a diàmetre una de les altures del triangle. Des d'un dels vèrtexs del triangle tracem la tangent a la circumferència, com es veu a la figura. Si designem com α l'angle que forma aquesta tangent amb el costat més proper del triangle, $\cos(\alpha)$ resulta ser un nombre racional. Escriu-lo com una fracció irreductible.



Per al problema 8 es necessita un nombre H, que passa del problema 1.

8. El frust de la figura (tronc de con recte) s'ha obtingut tallant un con recte per un pla paral·lel a la base i llevant el petit con de la part superior al tall. Així s'ha obtingut un cos amb dues cares circulars (bases) i una superfície corba. El con original té com a radi de la base 3 cm i tenia altura H cm. L'àrea lateral del frust (és a dir la de la superfície corba) és igual a la suma de les àrees de les bases. Quina és l'altura h del frust?



Heu de passar al primer repte (problema 9) com a valor N la resposta d'aquest problema, sense unitats.

Reptes finals

Per resoldre aquest problema cal conèixer nombres M i N que passen dels problemes 4 i 8.

9. Per a la funció $f(x) = ax + b$ observem que

$$f(f(f(1))) = M$$

i que

$$f(f(f(0))) = N.$$

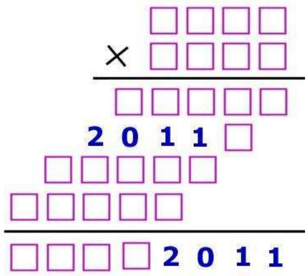
Calculeu el valor de x per al qual $f(x) = 2011$ i escriviu-lo com una fracció irreductible.

10. La Paula tira, successivament, quatre vegades un dau i amb els punts que marca el dau traduïts a xifres escriu un nombre de quatre xifres. Per exemple pot obtenir 5612 o 1234 o 3333. Calculeu quants dels nombres que pot obtenir la Paula tenen la propietat que cada xifra és més gran o igual que l'anterior, com per exemple succeeix en 1234 o 1125 o 4446.

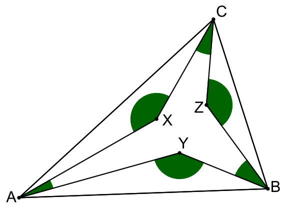
Reptes voluntaris

11. Quins són els dos factors de la multiplicació de la figura?

(Cada quadradet representa una xifra; cap de les files comença per 0 i no apareixen altres xifres que no tinguin quadradet si es fan tots els càlculs de la multiplicació)



12. Considerem tres punts X, Y, Z situats a l'interior d'un triangle ABC, tal com es mostra a la figura, és a dir que cap parella dels segments AX, AY, BY, BZ, CZ, CX té altres punts en comú que algun dels vèrtexs ABC. D'aquesta manera queda dibuixada una estrella (irregular) de tres puntes. Determineu (en graus sexagesimals) l'interval de valors al qual pot pertànyer la suma dels sis angles marcats a la figura.



Problemes a l'esprint

Equips d'alumnes de Batxillerat. Gener 2011

Participació i centres destacats

A partir d'aquesta XIX edició dels **Problemes a l'esprint** adreçada a equips d'alumnes de les edats que participen en la prova Cangur es va decidir desdoblar la convocatòria, una per a equips d'alumnes de batxillerat, que és la que es comenta aquí i que es va desenvolupar el dia 26 de gener de 2011 i una altra per a alumnes d'ESO.

Van participar 40 equips, de Catalunya i el País Valencià. Van enviar totes les respostes correctes un total de 10 equips.

Des de la comissió organitzadora agraïm la participació i donem un generalitzat "premi a la constància" per l'estona que els equips participants vàreu dedicar a fer matemàtiques, encara que no trobéssiu la solució a tots els problemes.

Centres més destacats

- Aula, Escola Europea, de Barcelona, centre guanyador de l'activitat
  Va tenir encert ple, al primer intent, amb un temps de 51 minuts.
- Pòdium de l'activitat
  Institut Arquitecte Manuel Raspall, de Cardedeu (Vallès Oriental)
  amb un temps aproximat d'una hora i un quart, al segon intent.
  Institut Les Corts, de Barcelona
  amb un temps aproximat d'una hora i mitja, al primer intent.

Altres equips que van encertar totes les respostes
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

Institut Violant de Casalduch, Benicàsssim (La Plana Alta)
Institut Jaume Vicens Vives, Girona (Gironès)
Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida (Segrià)
Institut Pius Font i Quer, Manresa (Bages)
Col·legi Sagrat Cor de Jesús, Terrassa (Vallés Occidental)
(dos equips que treballaven independentment)
Institut Montserrat Roig, Terrassa, (Vallés Occidental)
(únic equip que va respondre correcta els dos reptes "de propina")

Altres equips participants
(per ordre alfabètic del nom del municipi)

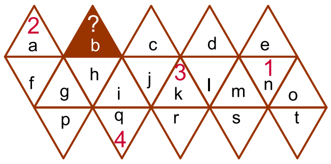
IES Sucro, Albalat de la Ribera (Ribera Baixa)
IES Bellaguarda, Altea (Marina Baixa)
Institut d'Argentona (El Maresme)
Insitut Júlia Minguell, Badalona (Barcelonès)
Immaculada Concepció, Horta (Barcelona)
Casa del Roure - Oak House School, (Barcelona)
Institut Montserrat, Barcelona (Barcelonès)
ICCIC Batxillerats, Barcelona (Barcelonès)
Institut Consell de Cent, Barcelona (Barcelonès)
Institut Ridaura, Castell Platja d'Aro (Baix Empordà)
Institut de Castelló d'Empúries (Alt Empordà)
Madre Vedruna Sagrado Corazón, Castelló (La Plana Alta)
Institut de Deltebre (Baix Ebre)
Institut Alexandre Deulofeu, Figueres (Alt Empordà)
Saint George's School, Fornells de la Selva (Gironès)
Institut Pere Fontdevila, Gironella (Berguedà)
Institut Manuel Blancafort, La Garriga (Vallès Oriental)
Institut El Pedró, L'Escala (Alt Empordà)
Institut de Llançà (Alt Empordà)
Institut Pompeu Fabra, Martorell (Baix Llobregat)
Institut Martí l'Humà, Montblanc (Conca de Barberà)
Institut Montserrat Miró i Vilà, Montcada i Reixac (Vallès Occidental)
Institut Montsacopa, Olot (La Garrotxa)
Institut Cristòfol Ferrer, Premià de Mar (El Maresme)
Escola Pia de Sabadell (Vallès Occidental)
Institut Jaume I, Salou (Tarragonès)
Escola Tecnos, Terrassa (Vallès Occidental)
Institut Narcís Oller, Valls (Alt Camp)
Institut Jaume Callis, Vic (Osona)
Institut Torre Roja, Viladecans (Baix Llobregat)

Batxillerat. Gener 2011

Branca d'olivera. Solucions

1. Solució: **4**.

Indiquem els triangles, cares de l'icosàedre, com en aquesta figura:



Com que l'1 és a **n** no pot anar a cap dels **d, e, l, m** ni tampoc a **o, s, t**. Per tant si ara ens fixem en **k, l, m, r, s**, que concorren en un vèrtex, veiem que l'1 ha d'anar a **r** i que a **i, j** hi van el 2 i el 5 en algun ordre. A partir d'aquí i del lloc on és el 3, si ens fixem en **c, d, j, k, l**, com que l'1 no pot ser a **l** ni a **d** deduïm que ha de ser **c**=1. Podem continuar fixant-nos en **b, c, h, i, j** i, com que el 4 no pot anar a **h** resulta que a la casella **b**, la de l'interrogant, hi ha d'anar el 4.
De fet es pot deduir quin nombre ha d'anar a cada una de les cares.

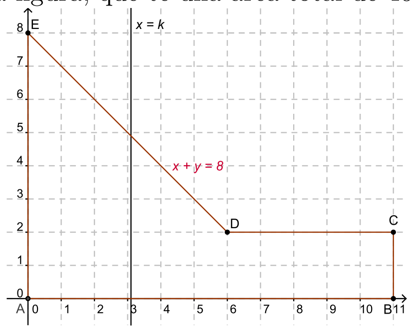
Passa $H = 4$ al problema 8

2. Solució: $xy = -2012/2011$.

A partir de $2011x - \dfrac{2012}{x} = 2011y - \dfrac{2012}{y}$ passem a $2011x - 2011y = \dfrac{2012}{x} - \dfrac{2012}{y}$ i si ara operem en el segon membre i traiem factor comú obtenim $2011(x-y) = \dfrac{2012(y-x)}{xy}$. Com que $x \neq y$ podem simplificar $(x-y)$ i arribem a $2011 = -\dfrac{2012}{xy}$ i d'aquí s'arriba ràpidament al resultat enunciat.

3. Solució: $k = 8 - 2\sqrt{6}$.

Vegem la figura, que té una àrea total de 40 unitats d'àrea .



És clar que la recta buscada $x = k$ ho serà per $k < 6$ i que haurem de descompondre el pentàgon inicial en un trapezi i un pentàgon.

Es pot veure que l'equació de la recta DE és $x + y = 8$ i, doncs, els vèrtexs del trapezi sobre la recta $x = k$ són $(k, 0)$ i $(k, 8 - k)$. Per tant les bases del trapezi són 8 i $8-k$ i l'altura n'és k. L'àrea, que ha de ser 20, és $\dfrac{8+8-k}{2} \cdot k$.

Si resolem l'equació que resulta trobem $k = \dfrac{16 \pm \sqrt{96}}{2}$ que podem escriure com $k = 8 \pm \sqrt{24} = 8 \pm 2\sqrt{6}$ però com que el valor de k que ens interessa ha de ser més petit que 6 la solució del problema és la que s'ha indicat.

Del problema 5 passa $T = 13$

4. Solució: **29**.

Com que les solucions de $x^2 + 13x + 12 = 0$ són $x = -12, x = -1$, el conjunt de nombres reals que interessa, és a dir els x que compleixen $x^2 + 13x + 12 \leq 0$ és l'interval $[-12, -1]$. Si examinem la funció de l'enunciat, $f(x) = x^2 - 13x + 15$, té forma d'U i el vèrtex en el punt corresponent a $x = \dfrac{13}{2}$ i per tant en l'interval $[-12, -1]$ és decreixent. El valor mínim s'assolirà per $x = -1$ i aquest valor és $f(-1) = 1 + 13 + 15 = 29$.

El valor M = 29 passa al problema 9

Colom de la pau. Solucions

5. Solució: **13**.

L'expressió que compleixen els nombres a, b, c, d es pot escriure així;

$$(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot(d+1)-1=209.$$

Per tant, ha de ser $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot(d+1)=210=2\cdot3\cdot5\cdot7$ i, doncs, com que els enters $a, b, c, d \geq 0$ l'única possibilitat és que els factors siguin $\{a+1, b+1, c+1, d+1\}=\{2,3,5,7\}$ és a dir $\{a,b,c,d\}=\{1,2,4,6\}$ i d'aquí $a+b+c+d=13$.

Passa $T=13$ al problema 4.

6. Solució: **11**.

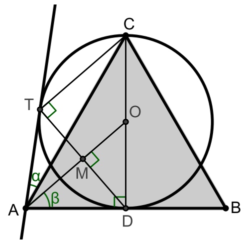
A partir de $f(1)=1$ i de $f(2n)=f(n)+1$ arribem a $f(2)=2, f(4)=3, f(8)=4, \ldots, f(2^n)=n+1$.

Per la condició $f(2n+1)=f(2n)$ veiem que $f(3)=f(2)=2$. Si multipliquem el 3 per 2 deduïm que $f(6)=f(3\cdot2)=f(3)+1=3$ i aleshores amb l'altra propietat veiem que $f(5)=f(4)=3, f(7)=f(6)=3$ és a dir que tots els nombres entre 4 i 8 tenen la mateixa imatge, 3. Si ara multipliquem per 2 tots els nombres entre 4 i 8, a partir de $f(2n)=f(n)+1$ veurem que els nombres parells entre 8 i 16 tenen tots com a imatge 4 i aleshores per $f(2n+1)=f(2n)$ raonarem que els nombres imparells entre 8 i 16 tenen també tots per imatge 4. Ho podem generalitzar.

Imaginem que ja hem vist que tots els nombres entre 2^n i 2^{n+1} tenen per imatge $n+1$. Si els multipliquem per 2, per $f(2n+1)=f(2n)$ veurem que tots els nombres parells entre 2^{n+1} i 2^{n+2} tenen per imatge $n+1$ i després, per $f(2n+1)=f(2n)$ deduirem que els nombres imparells entre 2^{n+1} i 2^{n+2} tenen també per imatge $n+2$.

Vist això, com que $2^{10}<2011<2^{11}$, serà $f(2011)=11$.

7. Solució: $\frac{13}{14}$.



Si dibuixeu la figura amb el GeoGebra i escriviu **FraccióText[cos(α)]** obtindreu 13/14. Val a dir que s'ha d'anar amb compte amb aquesta comanda del GeoGebra perquè escriu "com a fracció" qualsevol nombre, racional o no.

Farem els càlculs posant que el costat del triangle és 1. El costat AB és tangent a la circumferència en el seu punt mitjà i, per tant, $AD = 1/2$ i com que AT és l'altra tangent, també $AT = 1/2$.

Com que si O és el centre de la circumferència, OD és la meitat de l'altura del triangle, $OD = \frac{\sqrt{3}}{4}$ i, pel teorema de Pitàgores, $OA = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

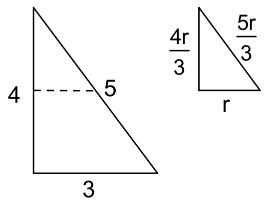
Per la simetria de la figura, AO, que és la bisectriu de les dues tangents, és perpendicular a TD, segment que uneix els dos punts de tangència. L'angle en T és recte perquè és un angle inscrit que comprèn mitja circumferència. Per tant, OA i CT són paral·leles i l'angle en O del triangle rectangle DOA és igual a l'angle en C del triangle rectangle TCD i, doncs, aquests dos triangles són semblants. Es compleix $\frac{DO}{TC} = \frac{OA}{CD}$, és a dir $\frac{\sqrt{3}/4}{TC} = \frac{\sqrt{7}/4}{\sqrt{3}/2}$ i d'ací $TC = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ i coneixem tots els costats del triangle ATC perquè $AT = 1/2, AC = 1$. Si apliquem el teorema del cosinus per al costat oposat a l'angle α obtenim $cos(\alpha) = 13/14$.

Una demostració alternativa es pot fer a partir de les fórmules trigonomètriques d'addició i subtracció d'angles. En el triangle rectangle DOA podem saber $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ i $\cos(\beta) = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Posem $\gamma = \angle TAD = 2\beta$. Amb les fórmules de l'angle doble podem conèixer $\sin(\gamma) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ i $\cos(\gamma) = \frac{1}{7}$. Finalment, per la fórmula del cosinus de la diferència podem obtenir $\cos(\alpha) = \cos(\gamma - 60°) = 13/14$.

Del problema 1 passa $H = 4$

8. Solució: **2 cm**.

Imaginem en secció el con sencer i el petit con que hem tallat per tenir el frust:



A partir de les dades conegudes deduïm que la generatriu del con sencer seria 5 cm. Si indiquem com r el radi del con petit, per semblança de triangles n'obtenim l'altura i la generatriu.
La condició de l'enunciat, posant l'àrea lateral del frust com l'àrea lateral del con sencer menys l'àrea lateral del con retallat, ens diu $9\pi + \pi r^2 = 15\pi - \pi r \cdot \dfrac{5r}{3}$. Si resolem aquesta equació obtenim $r = 1,5$ d'on l'altura del con retallat és $\dfrac{4r}{3} = 2$ i l'altura del frust $h = H - 2 = 2$ cm.

El valor $N = 2$ passa al problema 9.

Solucions als reptes finals

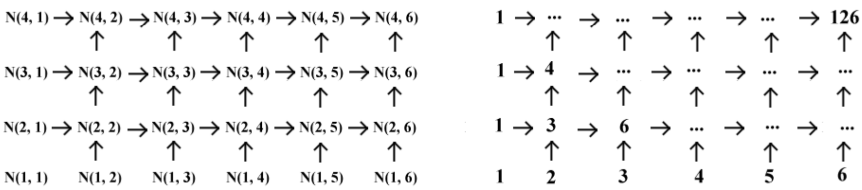
Dels problemes 4 i 8 passen $M = 29$ i $N = 2$

9. Solució: $\dfrac{26141}{39}$.

Si $f(x) = ax+b$ tenim que $f(f(f(x))) = a(a(ax+b)+b)+b = a^3x+a^2b+ab+b$ i, per tant, $f(f(f(0))) = 2 = a^2b + ab + b$ i $f(f(f(1))) = 29 = a^3 + a^2b + ab + b = a^3 + (a^2b + ab + b) = a^3 + 2$ d'on resulta $a^3 = 27$ i per tant $a = 3$. Serà $2 = a^2b + ab + b = 9b + 3b + b = 13b$ i $b = \dfrac{2}{13}$. Així doncs busquem un valor de x que compleixi $f(x) = 3x + \dfrac{2}{13} = 2011$. Aquest valor, escrit com una fracció irreductible és $x = \dfrac{26141}{39}$.

10. Solució: **126**.

Mirarem primer les possibilitats que comencin per 1 i podrem establir un mètode recurrent per comptar tots els casos i obtenir la solució. Designarem com $N(n, k)$ el nombre de possibilitats per a escriure nombres de n xifres, totes elles de l'1 al k i que quedin en ordre creixent dels valors de les xifres. Ens podem adonar que $N(4, 6) = N(3, 6) + N(4, 5)$ perquè de nombres que interessen i que comencen per 1 (xifra que haurà d'anar seguida per un nombre de tres xifres com els de l'enunciat) n'hi ha $N(3, 6)$. Per altra banda nombres que interessen i que comencen per una xifra més gran que 1, és a dir que les xifres es triaran en $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, n'hi ha $N(4, 5)$ (penseu que n'hi ha tants com nombres de 4 xifres en ordre creixent triades en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$). Semblantment raonaríem en general que $N(n, k) = N(n-1, k) + N(n, k-1)$. Podem omplir la taula següent i obtenim la solució:



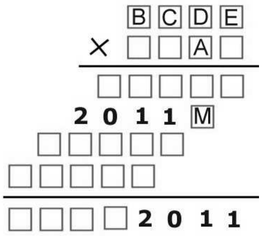
Hem pogut reconèixer una de les propietats dels nombres combinatoris que, de fet, ens poden donar una manera directa d'arribar al resultat. Vegem-ho. Si $\{a, b, c, d\}$ són les xifres d'un dels nombres que busquem, escrites en l'ordre en què hi apareixen, aleshores $\{a, b + 1, c + 2, d + 3\}$ són quatre nombres diferents triats en el conjunt $\{1, \ldots, 9\}$. De quantes maneres podem fer la tria? $\binom{9}{4} = 126$. I com que, recíprocament, per cada combinació de quatre nombres del conjunt $\{1, \ldots, 9\}$, que podem escriure en ordre creixent dels seus elements, $\{m, n, p, q\}$, si fem $\{m, n - 1, p - 2, q - 3\}$ obtenim les quatre xifres d'un dels nombres de l'enunciat, concloem que 126 és la solució del problema.

Diguem finalment que si coneixem el concepte i la fórmula de les combinacions amb possible repetició, ens podem adonar que les xifres $\{a, b, c, d\}$ d'un dels nombres que busquem constitueixen una combinació amb possible repetició dels nombres $\{1, \ldots, 6\}$ agafats de 4 en 4. La solució del problema serà $CR_{6,4} = \binom{9}{4} = 126$.

Solucions als reptes voluntaris

11. Solució: 4023×4957.

Proposem un dels molts camins per a trobar la solució. Es tracta de pensar Quines possibilitats hi ha perquè $A \times BCDE = 2011M$? No n'hi ha gaires; les analitzarem per veure si el producte pot acabar en 1.



A ha de ser més gran que 2 perquè altrament $2011M$ dividit per A donaria de cinc xifres.

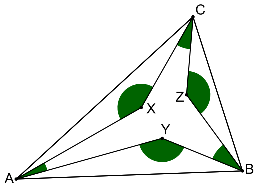
Provem amb $A = 3$. Dividim $2011M$ per 3 i hauria de ser 3×6704 o 3×6705 o 3×6706 però cap d'aquestes possibilitats serveix perquè després el producte final pugui acabar en 1.

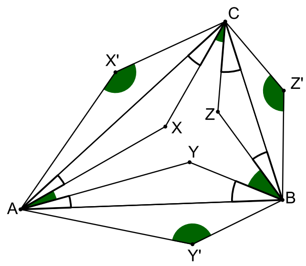
Per $A = 4$ trobem $B = 5$ i les possibilitats 4×5028 o 4×5029. Per l'1 final a priori podria ser aquesta i el segon factor seria de la forma $PQ49$ però $5029 \times PP49$ no acaba en 11.

Si pensem $A = 5$ i dividim $2011M$ per 5 trobem $B = 4$ i veiem que podria ser 5×4022 o 5×4023 però ha de ser aquesta última possibilitat perquè el producte total, que s'haurà d'obtenir fent $4023 \times PQ57$ pugui acabar en 1 i, de fet acaba en 11. Perquè el producte acabi en 011, una vegada escrites les dues primeres files de productes parcials, veiem que la segona xifra del segon factor ha de ser un 9 perquè la darrera xifra de la tercera fila de productes parcials sigui un 7. Per acabar escriurem el tercer producte parcial i veurem que, a fi i efecte que el producte sencer acabi en 2011, la darrera xifra del quart procute parcial ha de ser un 2 i aleshores el segon factor ha de ser 4957 .

Amb $A = 6$ i $A = 7$ ens passa com amb $A = 4$, trobem a priori dues possibilitats perquè $A \times BCDE = 2011M$ de les quals una la descartem perquè el producte total no pot acabar en 1 i l'altra perquè no acaba en 11; amb $A = 8$ i $A = 9$ ens passa com amb $A = 3$, cap de les possibilitats que trobem a priori serveix perquè el producte acabi en 1. Per tant l'única solució és la que ja hem comentat.

12. Solució: **(360°, 720°)**.





Si fem els simètrics dels punts X, Y, Z respecte els costats AC, AB, BC queda determinat un hexàgon $AY'BZ'CX'$. Es pot veure que la suma dels angles d'aquest hexàgon (720°) és igual a la suma S dels angles demanats més dues vegades la suma s dels angles marcats a la figura sense ombrejar. Podem observar que $0° < s < 180°$ perquè a s li manquen els angles de les puntes de l'estrella per ser igual a la suma dels angles del triangle ABC. Aleshores com que $S = 720° - 2s$ serà $360° < S < 720°$.

Per altra banda es pot veure que s pot ser tan petit, proper a 0° com es vulgui fent els angles de les puntes de l'estrella tan propers als angles del triangle com faci falta i també s pot ser tan proper a 180° com es vulgui fent que els punts X, Y, Z pràcticament coincideixen en un punt.

Per tant la suma S demanada pot recórrer tot l'interval (360°, 720°).