Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2010

Branca d'olivera. Solucions

1. B. 2.

Hem de prendre 1 milla = 1609 m.

Per tant un quadrat de 20 milles de costat té una superfície de $20^2 * 1609^2$ cosa que resulta, molt aproximadament, mil milions de m^2. Si dos mil milions de persones s'han de situar en aquesta superfície, caldrà que en mitjana es posin aproximadament 2 persones per m^2.

Passa $C = 2$ al problema 8

2. 1.

Si comptem els 58 que tenen taques negres a l'orella esquerra més els 15 que tenen taques negres a l'orella dreta més els 29 que tenen les orelles blanques resulta un total de 102 dàlmates. Això vol dir que n'hi ha justament un $(102 - 101)$ que l'hem comptat dues vegades que serà l'únic que té taques a les dues orelles.

3. Equips d'ESO. $\frac{2}{5}$.

Atenent que es demana la fracció d'àrea acolorida podem prendre el radi que interessi, per exemple 10 unitats. Aleshores els radis dels semicercles que apareixen seran 5, 4, 3, 2, i 1 unitats. L'àrea en unitats quadrades del semicercle gran serà 25π. Per trobar l'àrea acolorida restarem de 16π u^2 l'àrea del següent semicercle, 9π u^2, però així haurem restat 4π u^2 qu eno estan acolorits i haurem de tornar a afegir π u^2 del cercle acolorit més petit. En total, doncs l'àrea acolorida serà $(16 - 9 + 4 + 1)\pi = 10\pi$ u^2, valor que representa els $\frac{2}{5}$ de 25π.

3. Equips d'ESO i BTX. $\frac{25}{4}$.

Aquest enunciat correspon al mateix problema que el 7 per a equips només d'ESO. Allà trobareu l'explicació de la solució.

Del problema 5 passa $M = 18$

4. Equips d'ESO: 40.

Aquest problema es pot resoldre mitjançant un "tempteig raonat" amb la idea inicial que si aconseguim que les dues noies treballin alhora tota l'estona segurament així guanyaran temps.

Com que $M = 18$ resulta que la Maria triga només 6 minuts a resoldre un problema difícil enfront dels 8 que triga l'Anna i això fa pensar que serà interessant que la Maria faci com més problemes difícils, millor.

Si ho provem adjudicant 9, o 8 o 7 problemes difícils a la Maria veurem que, tot i que assignéssim tots els problemes senzills a l'Anna hi hauria molta estona desaprofitada.

Si ho provem amb 6 problemes difícils per a la Maria (36 minuts), l'Anna n'haurà de fer 3, cosa que representa 24 minuts i podrà destinar 12 minuts més que la Maria als problemes senzills. Això s'aconsegueix exactament si l'Anna resol 8 problemes senzills (16 minuts) i la Maria un (4 minuts). Així resolen tots els problemes amb 40 minuts de treball conjunt.

Si ho provem amb 5 problemes difícils per a la Maria (30 minuts) l'Anna necessitaria 32 minuts per resoldre els altres problemes difícils (4×8) i es reparteixin com es reparteixin els problemes senzills el temps que empraran és superior a 40 minuts.

Un raonament semblant es pot aconseguir pensant en assignar inicialment el màxim nombre de problemes senzills a l'Anna.

El valor $A = 40$ passa al problema 9 per als equips només d'alumnes d'ESO.

4. Equips de BTX. 5041.

Com que $M = 18$ busquem un nombre de quatre xifres que doni residu 1 quan es divideix per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i 9. Per tant haurà de ser 1 més un múltiple $mcm(2,3,4,5,6,7,8,9) = 8 \times 9 \times 5 \times 7 = 2520$. Els nombres de quatre xifres múltiples de 2520 són 2520, 5040, 7560. Ens interessarà estudiar 2521, 5041, 7561. D'aquests només el 5041 és un quadrat perfecte ($5041 = 71^2$).

La suma de les xifres de la solució, A = 10, passa al problema 9 per als equips conjunts d'ESO i Batxillerat.

Colom de la pau. Solucions

5. 18.

El camí que havia de fer la nau era de 2^{20} km. La quarta part d'aquest camí és $\dfrac{2^{20}}{2^2} = 2^{18}$ km. Des d'aquest moment fins que estava a 2^{19} km va recórrer $2^{19} - 2^{18} = 2^{18} \times (2-1) = 2^{18}$ km.

Passa $A = 6$ al problema 3.

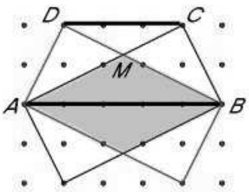
6. 121.

És clar que com que tots tenen la mateixa alçada i tots tenen 2 mans, aquests aspectes no els hem de tenir en compte.

A part d'això, la situació "més desfavorable" amb què ens podríem trobar per aconseguir un equip d'11 extraterrestres idèntics seria trobar-ne 10 de vermells amb dos peus, 10 de vermells amb 3 peus, 10 de vermells amb 4 peus i 10 de vermells amb 5 peus. I semblantment amb extraterrestres de color blau o de color verd. Fins aquí ja tenim 120 habitants que no podrien formar un equip de futbol d'habitants del planeta tots idèntics. Però si hi ha un altre habitant, el 121è, aleshores segur que ja n'hi haurà 11 d'idèntics.

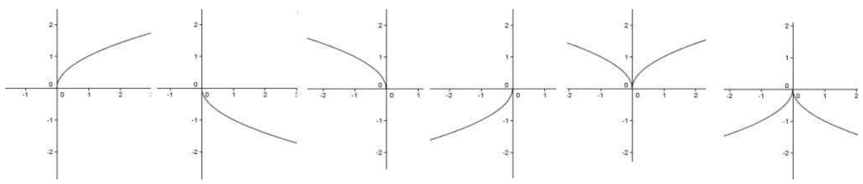
7. Equips d'ESO. $\frac{25}{4}$.

El triangle AMB és la meitat de l'àrea que busquem. La base d'aquest triangle és de 5 unitats. Els triangles CMD i AMB són semblants i la raó de semblança és $\frac{3}{5}$; per tant l'altura de CMD i l'altura de AMB també estan en la raó $\frac{5}{3}$; si anomenem h l'altura de AMB aleshores l'altura de CMD serà $\frac{3}{5}h$. Com que entre les dues han de sumar 2 unitats es dedueix que $h = \frac{5}{4}$. Tenim doncs que el doble de l'àrea de AMB, que és l'àrea que busquem, és $5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$



7. Equips d'ESO i BTX. 6.

No hi ha ni la gràfica de $y = x^2$ ni la de $y = -x^2$, però si les altres sis. A la figura següent apareixen en el mateix ordre que es donen a l'enunciat.



Del problema 1 passa $C = 2$

8. Equips d'ESO. El 5; $p(5) = \dfrac{1}{3}$.

Els dos daus tindran les cares numerades així $\{5, 4, 4, 1, 1, 1\}$. Segurament la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada.

	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

D'aquesta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$.

El valor $H = 5$ passa al problema 10 per als equips només d'alumnes d'ESO.

8. Equips d'ESO i BTX. $\dfrac{3}{10}$.

Com que passa $C = 2$ hem d'estudiar el problema per a 3 nois i 2 noies. Els esquemes de les maneres de seure tres nois (que indicarem amb **A**) i dues noies (que indicarem amb **B**) són $\binom{5}{2} = PR^5_{3,2} = 10$. Aquests 10 esquemes són equiprobables i, com que n'hi ha només 3, **ABABA**, **BAABA**, **ABAAB** que fan que noies i nois estiguin asseguts de manera que es compleixi l'enunciat, la probabilitat demanada és $\dfrac{3}{10}$.

El numerador, $H = 3$ passa al problema 10 per als equips conjunts d'ESO i Batxillerat.

Solucions als reptes finals

9. Equips d'ESO. 1.

Hi ha una conjectura per a la successió de Collatz que estableix que sigui el que sigui el nombre natural amb el qual comencem la successió sempre arribem a un cicle 4, 2, 1 que es va repetint.

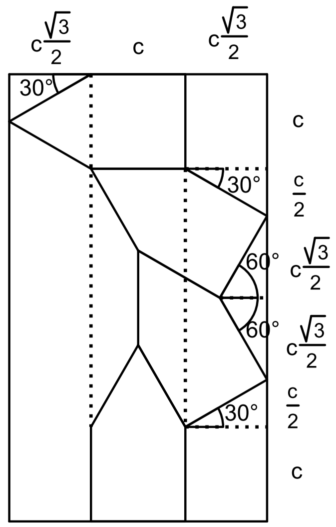
Si comencem amb el valor que passa, $A = 40$ la successió esdevé aquesta:

$\{40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots\}$

on es pot veure que després dels 6 primers termes es va repetint indefinidament el bloc de termes 4, 2, 1. Com que el residu de la divisió de $2010 - 6$ per 3 és 0 vol dir que trobarem un nombre enter de blocs fins arribar al terme 2010è, que és, doncs, 1.

9. Equips d'ESO i BTX. 17,32.

Si c és el costat del quadrat i del triangle equilàter que componen cada pentàgon, a la figura s'indiquen longituds de segments, deduïdes mitjançant les raons trigonomètriques de 60° i 30° que ens permeten dir que la base del rectangle és $c(1 + \sqrt{3})$ i l'altura $c(2 + \sqrt{3})$. Per tant la relació entre altura i base és $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Si la mesura de la base és de 10 m , la de l'altura, arrodonida al segon decimal, serà $10\sqrt{3} = 17,32$ m.



10. Equips d'ESO: D; equips ESO/BTX: B.

L'Equador terrestre té 40 milions de m, és a dir 40.000 km que, en el seu moviment aparent, el Sol recorre en 24 h.

Si el Petit Príncep viatja 5 hores a 2010 km/h haurà recorregut 10.050 km, que el Sol trigarà 6,03 h = 6 h 1 min 48 s a recórrer. Per tant el Petit Príncep s'haurà d'esperar poc més d'una hora.

En canvi, si només hagués viatjat 3 hores a 2010 km/h hauria fet 6030 km. El Sol triga 3,618 h = 3 h 37 min 4,8 s a recórrer aparentment aquesta distància. Per tant, en aquets cas, al Petit Príncep li caldria esperar un temps entre mitja hora i tres quarts.

Solucions als reptes voluntaris

El repte 11 per a equips d'ESO era el mateix problema que el 4 per a equips ESO/BTX.

11. Per a equips ESO/BTX i 12. per a equips d'ESO. Solució: 73.

Farem una consideració prèvia: si el nombre de persones que hi hagués a la fila fos una potència de 2, llavors seria la persona que inicialment ocupava el primer lloc de la fila la que se n'aniria l'última. La raó és que, en aquests casos, completant un procés dun *no* un *sí*, obtenim sempre en total una potència de 2 de persones, amb la primera al capdavant.

Aleshores per trobar la solució amb 100 persones considerarem la potència de 2 inferior més pròxima a 100, en aquest cas 64. I la pregunta ara és: quin serà el número de la persona que hi ha en el primer lloc de la fila quan queden 64 persones? En aquest moment, 36 persones hauran estat convidades a refer la cua i 36 hauran marxat. Això fa un total de 72. Per tant el primer de la llista portarà el número 73.

12. Equips d'ESO/BTX. 12.

Si considerem la suma d'una progressió aritmètica veurem que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

Aleshores si apliquem el teorema de Pitàgores a les dades de l'enunciat obtenim $13^2 = m^2 + n^2$ on m i n són dos nombres enters que $m \leq n$. Però això ens diu que m, n i 13 són els costats d'un triangle rectangle. L'única terna pitagòrica amb el 13 com a valor de la hipotenusa és $\{5, 12, 13\}$ i, doncs, $n = 12$.