Idees per a les solucions dels problemes a l'esprint. 10 de febrer de 2021.

Branca d'olivera

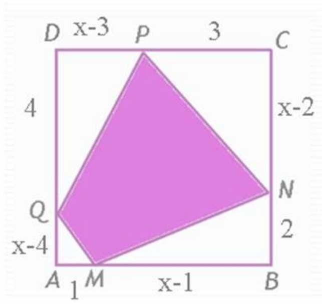
---

1. Cada un dels punts pot estar en relleu o no, independentment dels altres. Si diem 1 en relleu i 0 sense relleu, els exemples es poden llegir 11101110, 00100100, 10011100. Això dona $2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^8 = 256$ possibilitats, però com que algun dels punts ha d'estar en relleu no val la possibilitat 00000000. Resposta, doncs, 255 possibilitats.

---

2. Si anomenem x el costat del quadrat (ha de ser $x < 4$) la suma d'àrees dels quatre triangles blancs és

$$\frac{(x-1)\cdot 2 + (x-2)\cdot 3 + (x-3)\cdot 4 + (x-4)\cdot 1}{2} = 5x - 12.$$



Si l'àrea de la part acolorida és la meitat de l'àrea del quadrat, l'àrea de la part blanca, també ho és. Aleshores $5x - 12 = \dfrac{x^2}{2}$ ens dona $x = 6$ o $x = 4$, però aquest darrer valor no compleix l'enunciat. Per tant $x = 6$ i l'àrea del quadrat és 36.

---

3. Del problema 5 ve el valor $R = 72$. Tindrem en compte que 72 minuts=6/5 d'hora. Indiquem com a, b, c quantes hores trigarien l'Anna, en Biel o la Cinta a fer la tasca treballant en solitari. En una hora farien, respectivament, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ de la feina. Aleshores escrivim les dades del problema pensant quina part de la feina s'enllesteix, en cada cas, en una hora. Tindrem $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6/5} = \frac{5}{6}$ i $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Si pensem que després treballen com un equip de tres, en una hora enllestiran $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ de la feina. Si sumem les tres dades obtenim $2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{7}{3}$, i per tant $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{7}{6}$. En una hora farien, doncs, $\frac{7}{6}$ de la feina, i per tant per fer-la estaran $\frac{6}{7}$ d'hora.

---

4. A partir de l'equació donada en el problema, operant i agrupant termes semblants , obtenim $y = 2x$. Si ho substituïm en l'expressió $\dfrac{5x+5y}{3x-y}$ obtenim $\dfrac{15x}{x} = 15$.

Colom de la pau

5. Es poden treure factors de cada arrel i queda $\sqrt{R} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ i si ara elevem al quadrat $R = 72$.
Però (potser algú diria que "d'una manera no tan elegant") si elevem directament l'equació donada al quadrat també obtenim $R = 2 + 8 + 18 + 2\sqrt{2 \cdot 8} + 2\sqrt{2 \cdot 18} + 2\sqrt{8 \cdot 18} = 72$.

---

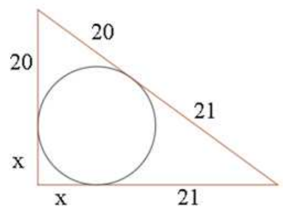
6. Com que $2021 = 47 \cdot 43$ i el primer factor de l'equació donada és més gran que el segon si x, y han de ser nombres enters positius, només hi ha dues possibilitats. Una d'elles, adequant l'escriptura del segon factor, és $x^2 - y^2 = 47$ i $x^2 - y^2 - (K-1)y^2 = 43$; en aquest cas hauria de ser $(k-1)y^2 = 4$, que ens porta a $y = 1$ o $y = 2$, que en cap cas donen valor enter per a x en $x^2 - y^2 = 47$. L'altra possibilitat a analitzar és $x^2 - y^2 = 2021$ i $x^2 - y^2 - (K-1)y^2 = 1$ i, doncs, hauria de ser $(k-1)y^2 = 2020$. Els únics quadrats perfectes divisors de 2020 són 1 i 4. Tindríem doncs $y = 1$ que no dona valor enter per a x en $x^2 - y^2 = 2021$ o bé $y = 2$ que ens porta a $x^2 = 2025 = 45^2$. Aleshores podeu veure en l'altre factor, que ha de ser 1, que serà $k - 1 = 505$ i per tant $k = 506$.

---

7. Pel nombre que passa del problema 1, és $a + b + c + d = 255$.
Posem $P = a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d$. Com que $(a + c) \cdot (b + d) = a \cdot b + a \cdot d + b \cdot c + c \cdot d$ observem que $P = (a+c) \cdot (b+d) - a \cdot d$. Aconseguirem que P sigui màxim si el primer sumand és màxim i el segon és mínim. Perquè el segon sigui mínim és clar que ha de ser $a = 1$, $d = 1$. Aleshores serà $c + b = 253$ i volem que sigui màxim $(c + a)(b + d) = (1 + c)(254 - c)$, expressió que correspon a la paràbola (amb variable independent c) $y = (1 + c)(254c) = -c^2 + 253c + 254$. Aquesta paràbola té un màxim per $c = 126,5$. Per a valor enters el màxim s'assolirà en el nombre enter més proper a aquest, que és $c = 126$ i serà $b = 127$ (o, alternativament, per $c = 127$ i $b = 126$). Per $a = 1$, $b = 127$, $c = 126$, $d = 1$ el valor de P, que serà el màxim possible, és 16255.

---

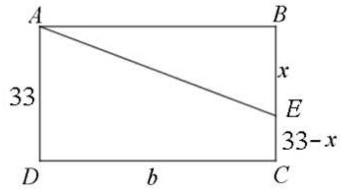
8. Si des d'un punt exterior a un cercle fem les dues tangents a la circumferència que el delimita, els segments que uneixen el punt amb els dos punts de tangència tenen la mateixa longitud. Vegeu doncs la figura. Si apliquem el teorema de Pitàgores trobem $41^2 = (20+x)^2 + (21+x)^2$ i d'aquí, arrodonint al segon decimal, $x = 8,49$ i per tant el perímetre del triangle, que és $82 + 2x$, arrodonint als centímetres és 99 cm.



Reptes finals

9. Venen $M = 15$ i $N = 99$. Anomenem MM el nombre que resulta de concatenar n vegades el 15. Perquè un nombre sigui sigui divisible per 99 ho ha de ser per 9 i per 11. La suma de les xifres de MM és $6n$, que ha de ser múltiple de 9. Perquè això succeeixi ha de ser n múltiple de 3. La diferència entre la suma de les xifres de lloc parell i les xifres de lloc imparell de MM és $4n$, que ha de ser múltiple de 11. Per tant n ha de ser múltiple de 11. El nombre més petit que és múltiple de 3 i de 11 és $n = 33$.

10. Del problema anterior ve $V = 33$. Vegeu la figura.



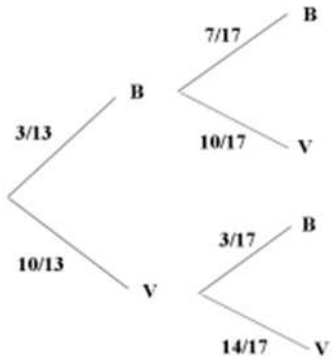
Àrea del triangle: $\dfrac{b \cdot x}{2}$. Àrea del trapezi: $\dfrac{b \cdot (66 - x)}{2}$. La raó de les àrees és doncs $\dfrac{66 - x}{x}$. Com que a priori no sabem quina de les dues àrees és més gran hem d'estudiar si és $\dfrac{66 - x}{x} = \dfrac{4}{7}$ o bé $\dfrac{x}{66 - x} = \dfrac{4}{7}$. La primera ens dona $x = 42$, valor no vàlid per al problema, i, doncs serà $\dfrac{x}{66 - x} = \dfrac{4}{7}$ que ens dona $x = 24$. Serà doncs $BE = 24$ i $EC = 9$. Aquesta és la resposta.

Problemes de propina

1. La probabilitat demanada és

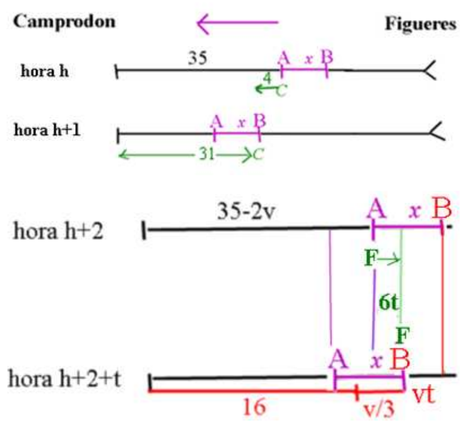
$$\frac{3}{13}\cdot\frac{7}{17}+\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{17}=\frac{3}{13}.$$

Veritat que la resposta és un poc sorprenent, en certa manera "com si només haguéssim fet la primera extracció"?



2. Enfocarem el problema tal com està plantejat, amb opcions de resposta i analitzarem els diferents possibles valors de n.
$n = 11$. És ràpid de pensar que si entre les 11 rectes no n'hi ha dues que siguin paral·leles, aleshores es compleix el que diu l'enunciat. I això ens encamina a pensar que aquest problema és una reflexió sobre el paral·lelisme i, doncs, que per decidir sobre el que proposa l'enunciat caldrà pensar que entre les n rectes hi haurà d'haver conjunts de rectes paral·leles.
Així, per $n = 12$ podem veure que si es tracta de sis parelles de rectes paral·leles, és a dir que es distribueixen $12 = 2+2+2+2+2+2$ cada recta és "no paral·lela" a unes altres 10 perquè en la suma anterior, esborrant un sumand, els altres sempre sumen 10.
I això és el que haurà de passar, que es pugui descompondre n en sumands (que representen quantes rectes són paral·leles entre elles i no a les altres) de manera que si en suprimim un, els altres sumands (és a dir la quantitat de rectes que no corresponen a les del sumand suprimit) sempre sumin 10. És clar, doncs, que els sumands han de ser iguals. Això es pot fer amb $n = 15 = 5+5+5$ (tres conjunts de cinc rectes paral·leles i no paral·leles a les altres) i amb $n = 20 = 10+10$ (dos conjunts de 10 rectes paral·leles) però no es pot fer amb $n = 16$.

3. Anomenarem x la distància que separa l'Andreu i en Bernat, que sempre serà la mateixa perquè circulen a velocitat constant, que indicarem com v. Analitzarem comparativament primer les dades de l'encreuament dels dos ciclistes amb la Carla i després les circumstàncies de l'encreuament amb la Fàtima.



Entre les dues situacions de la primera figura la Carla ha caminat 4 km; per tant ha passat 1 hora. Com que en Bernat ha recorregut $x + 4$ km serà $v = x + 4$.

Quan l'Andreu troba la Fàtima, com que han passat 2 hores des de que estava a 35 km de Camprodon, ara està a $35 - 2v$. Com que 20 minuts és 1/3 d'hora, quan en Bernat troba la Fàtima està a $16 + v/3$ km de Camprodon. Indiquem com t el temps des de que l'Andreu troba la Fàtima fins que, després, la troba en Bernat.

El trajecte que ha fet la Fàtima és $6t$. Vegeu que es complirà que $35 - 2v + x = 16 + v/3 + v\cdot t$ i que $x = 6t + v\cdot t$. Amb aquestes dues equacions i $v = x + 4$ es dedueix que $x = 5$.