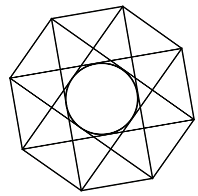
XVIII Cangur SCM 21 de març de 2013 Nivell 4

Qüestions de 3 punts:

1. Quin d'aquests nombres és el més gran?

A) 2013 B) 2^{0+13} C) 20^{13} D) 2012^3 E) $20 \cdot 13$

2. Els costats de l'octàgon regular de la figura fan 10 cm. Quant fa el radi del cercle inscrit en l'octàgon petit que formen les diagonals dibuixades?



A) 10 B) 7,5 C) 5 D) 2,5 E) 2

3. Un prisma té 2013 cares en total. Quantes arestes té?

A) 2011 B) 2013 C) 4022 D) 4024 E) 6033

4. L'arrel cúbica de $3^{(3^3)}$ és igual a:

A) 3^3 B) $3^{(3^3-1)}$ C) $3^{(2^3)}$ D) $3^{(3^2)}$ E) $\left(\sqrt{3}\right)^3$

5. L'any 2013 té la propietat que el nombre de l'any és format per les xifres consecutives 0, 1, 2 i 3. Quants anys han passat des de l'última vegada que el número de l'any es podia formar amb quatre xifres consecutives?

A) 467 B) 527 C) 581 D) 693 E) 990

6. Si $f(x) = mx + n$, amb m i n constants, és una funció que compleix $f(2013) - f(2001) = 100$, quant val $f(2031) - f(2013)$?

A) 75 B) 100 C) 120 D) 150 E) 180

7. Si $2 < x < 3$, quantes de les quatre expressions següents són certes?

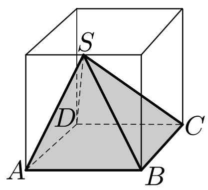
$$4 < x^2 < 9 \qquad 4 < 2x < 9 \qquad 6 < 3x < 9 \qquad 0 < x^2 - 2x < 3$$

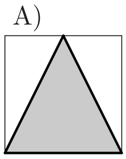
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

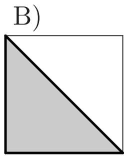
8. Sis superherois han capturat vint malfactors. El primer superheroi ha capturat un malfactor; el segon, dos malfactors, i el tercer, tres. El quart superheroi n'ha capturat més que qualsevol dels altres cinc. Quin és el nombre mínim de malfactors que podem assegurar que ha capturat el quart superheroi?

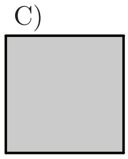
A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

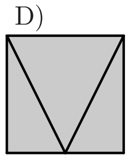
9. En el cub transparent de la figura es pot veure una piràmide sòlida i opaca $ABCDS$ amb base $ABCD$, de manera que el vèrtex S és en el punt mig d'una de les arestes del cub. Si ens mirem el cub des de totes les cares possibles, quina de les vistes següents no és possible?

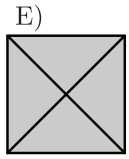


A)


B)


C)


D)


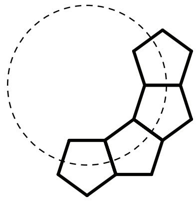
E)


10. Quan una certa quantitat d'una substància sòlida es fon, el seu volum augmenta una dotzena part. En quina proporció decreix el volum d'aquesta substància líquida quan se solidifica i retorna al volum original?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{14}$

Qüestions de 4 punts:

11. En Raül té peces en forma de pentàgon regular, totes iguals. Les enganxa aresta amb aresta fins que forma un cercle, com es veu en la figura. Quantes peces ha utilitzat per a formar el cercle?



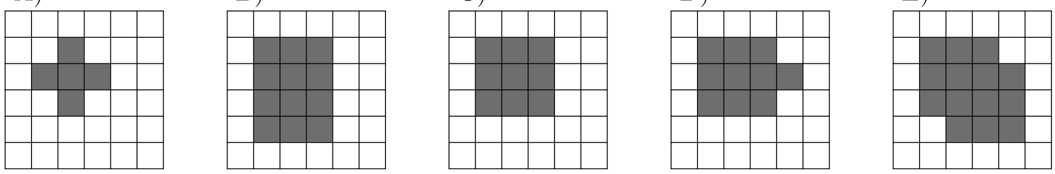
A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

12. Quants nombres enters positius n hi ha, de manera que tant $3n$ com $n/3$ són nombres de tres xifres?

A) 12 B) 33 C) 34 D) 100 E) 300

13. Volem posar una catifa circular en un terra enrajolat amb peces quadrades. Totes les rajoles que tinguin més d'un punt en comú amb la catifa estaran ombrejades. Quina de les opcions següents és impossible d'aconseguir?

A) B) C) D) E)

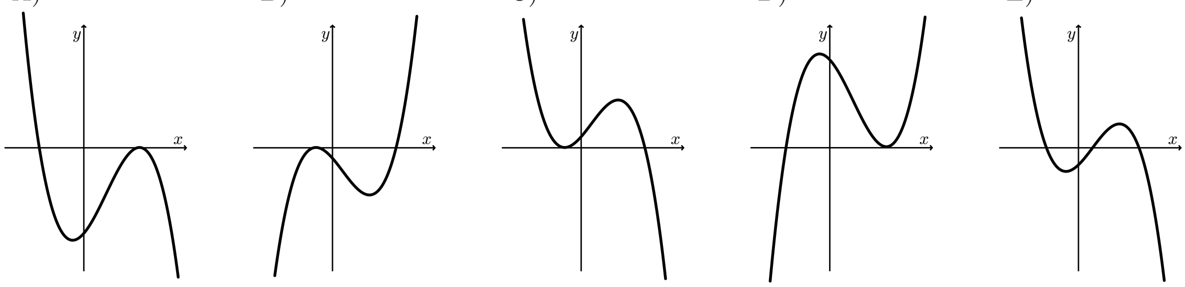


14. D'una certa funció f en el conjunt dels nombres enters, se'n fa aquesta afirmació: «Per a qualsevol x parell, $f(x)$ és parell». Si aquesta afirmació és falsa, quina de les proposicions següents podem assegurar que és certa?

A) Per a qualsevol nombre parell x, $f(x)$ és senar.
B) Per a qualsevol nombre senar x, $f(x)$ és parell.
C) Per a qualsevol nombre senar x, $f(x)$ és senar.
D) Hi ha un nombre parell x que fa que $f(x)$ sigui senar.
E) Hi ha un nombre senar x que fa que $f(x)$ sigui senar.

15. La gràfica d'una funció $y = (a - x)(b - x)^2$, en què $a < b$, és una d'aquestes. Quina?

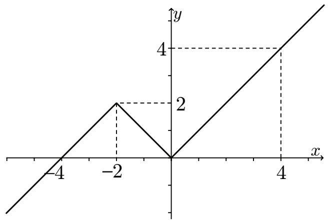
A) B) C) D) E)



16. Un costat d'un rectangle fa 5 unitats. Aquest rectangle es pot dividir en un quadrat i un rectangle, de manera que l'àrea d'una d'aquestes dues peces fa 4 unitats quadrades. Quants rectangles diferents es poden formar amb aquestes condicions?

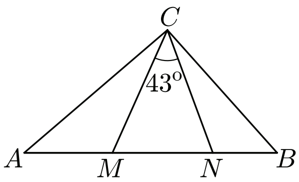
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. En Víctor ha dibuixat la gràfica d'una funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, formada per dues semirectes i un segment, com es veu en la figura. Quantes solucions té l'equació $f(f(f(x))) = 0$?



A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

18. En el triangle $\triangle ABC$ els punts M i N sobre el costat AB compleixen $AN = AC$ i $BM = BC$. Trobeu l'angle $\widehat{ACB}$ si $\widehat{MCN} = 43°$.



A) 86° B) 89° C) 90° D) 92° E) 94°

19. Quants parells (x, y) de nombres enters i positius satisfan l'equació $x^2y^3 = 6^{12}$?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) Un altre nombre

20. Una caixa conté 900 targetes numerades de la 100 a la 999, totes amb nombres diferents. En Francesc treu, de cop, unes quantes targetes i fa la suma de les xifres de cadascuna. Quantes targetes ha de treure, com a mínim, per estar segur que tindrà tres targetes amb la mateixa suma de xifres?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

Qüestions de 5 punts:

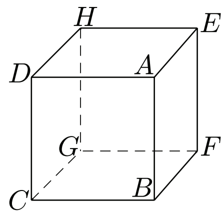
21. Quants parells (x, y) de nombres enters amb $x \leq y$ hi ha, de manera que el producte dels dos nombres és igual a cinc vegades la seva suma?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

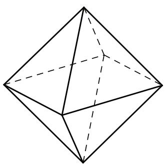
22. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és la funció definida per les propietats següents: f és periòdica amb període 5, i per $-2 \leq x < 3$, es compleix que $f(x) = x^2$, quant és $f(2013)$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 9

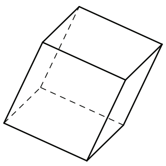
23. El cub sòlid de la figura es talla per un pla que passa pels tres vèrtexs veïns del vèrtex A, és a dir D, E i B. De manera semblant, el cub es talla per plans que passen pels vèrtexs veïns a cadascun dels set vèrtexs que queden. Com serà la peça que contindrà el centre del cub després de tallar-lo?



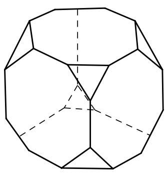
A)



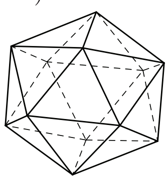
B)



C)



D)



E) El centre de la figura pertany a diverses peces.

24. Quantes solucions (x, y) té l'equació $x^2 + y^2 = |x| + |y|$, si x i y són nombres reals?

A) 1 B) 5 C) 8 D) 9 E) Infinites

25. Per a qualsevol nombre enter n, definim la funció f així:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

Per a un nombre enter positiu k, $f^k(n)$ representa $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, en què el signe f hi apareix k vegades. Quantes solucions té l'equació $f^{2013}(n) = 1$?

A) 0 B) 4026 C) 2^{2012} D) 2^{2013} E) Infinites

26. En un pla es dibuixen unes quantes línies rectes. La recta a talla exactament tres de les altres rectes, i la recta b talla exactament quatre de les altres rectes. La recta c talla exactament n de les altres rectes, amb $n \neq 3, 4$. Quantes rectes s'han dibuixat en el pla?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) Un altre nombre

27. La suma dels n primers nombres enters positius és un nombre de tres xifres que té totes les xifres iguals. Quant sumen les xifres de n?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

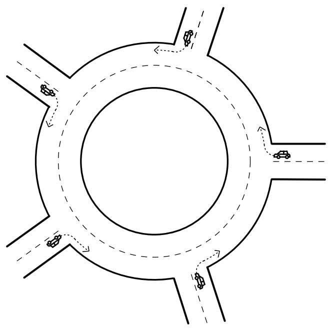
28. En l'illa dels Cavallers i els Mentiders, hi viuen només dues classes de persones: els Cavallers (que sempre diuen la veritat) i els Mentiders (que sempre menteixen). Un dia, vaig trobar dos homes que vivien en aquesta illa i vaig preguntar al més alt si els dos eren Cavallers. Em va contestar, però només amb això no en vaig tenir prou per a saber què eren, així que vaig preguntar al més baix si el més alt era un Cavaller. Em va contestar i ja vaig poder saber què era cadascú. Eren Cavallers o Mentiders?

A) Els dos eren Cavallers.
B) Els dos eren Mentiders.
C) El més alt era Cavaller i el més baix era Mentider.
D) El més alt era Mentider i el més baix era Cavaller.
E) No hi ha prou informació per a determinar-ho.

29. La Júlia ha escrit un algorisme per a crear una successió de nombres: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, en què m i n són nombres naturals. Trobeu el valor de a_{100}.

A) 100 B) 1000 C) 2012 D) 4950 E) 5050

30. En la rotonda que es veu en la figura, hi entren cinc cotxes a la vegada, cadascun des d'una entrada diferent. Cada cotxe surt per un cap de carrer diferent d'aquell pel qual ha entrat, i cadascun surt de la rotonda per un lloc diferent. De quantes maneres diferents poden sortir els cotxes de la rotonda?



A) 24 B) 44 C) 60 D) 81 E) 120