XLI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió
10 de Desembre de 2004, de 16 a 19.30 h.

1. Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.

2. Trobeu el nombre natural més petit que sigui divisible per 847 i tingui totes les xifres iguals.

3. Sigui α un angle menor que 180°. Demostreu que si $\cos\alpha = p/q$, un nombre racional, llavors existeix un triangle amb els costats enters que té un angle igual a α.

XLI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

11 de Desembre de 2004, de 9.30 a 13 h.

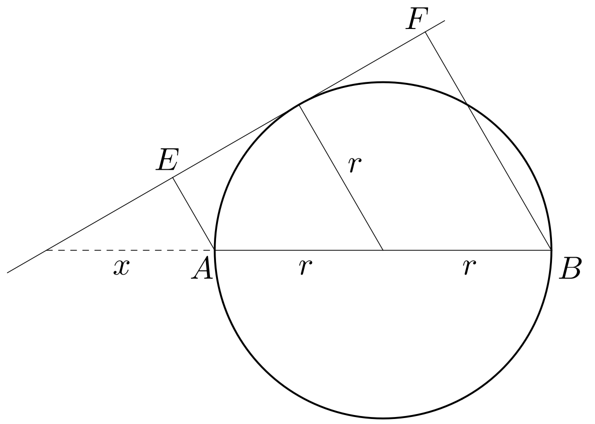
4.- Sigui ABC un triangle amb costats a, b, c, respectivament oposats a A, B, C.
a) Demostreu que si $\hat{B} = 2\,\hat{A}$, aleshres es compleix que $b^2 - a^2 = ac$.
b) El recíproc de l'apartat a), és cert?

5.- Trobeu tots els nombres enters m, n, solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$.

6.- Demostreu que qualsevol políedre convex té almenys una cara que és un polígon de menys de sis costats.

Problema 1. *Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.*

Primera solució.



La suma de distàncies demanades és constant i igual al diàmetre. Pel teorema de Tales tenim

$$\frac{x}{EA} = \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r}{FB}.$$

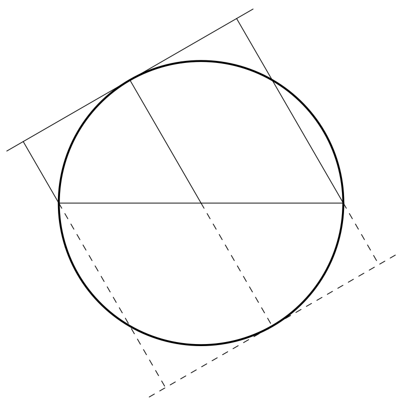
Si sumem antecedent i conseqüents, la raó que surt és igual a les raons que formen la proporció:

$$\frac{x+r}{r} = \frac{x}{EA} = \frac{x+2r}{FB} = \frac{2x+2r}{EA+FB}$$

i si ara igualem la primera i l'última queda $EA + FB = \dfrac{2x+2r}{x+r}\, r = 2r$.

Segona solució.

Si es dibuixen els simètrics respecte del centre dels punts de la figura anterior, es veu directament el valor de la suma demanada.



Problema 2. *Trobeu el nombre natural més petit que sigui divisible per 847 i tingui totes les xifres iguals.*

Primera solució.

Com que $847 = 7 \cdot 11^2$, el nombre buscat $N = \overbrace{aa\ldots a}^{n}$, amb $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, ha de ser divisible per 7 i per 11^2. Per tal que N sigui divisible per 11, cal que $n = 2k$, i en aquest cas serà $N/11 = \overbrace{0a\,0a\ldots 0a}^{k}$. Si aquest nombre ha de tornar a ser divisible per 11, ha de ser $k = \dot{\overline{11}}$. El nombre més petit que ho compleix és $n = 22$. Per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$. El nombre buscat és

$$\overbrace{77\ldots 7}^{22} = 847 \cdot 91\,822\,736\,455\,463\,728\,191.$$

Segona solució.

Tenim que $\overbrace{aa\ldots a}^{n} = \dot{\overline{11^2}} \iff \overbrace{99\ldots 9}^{n} = \dot{\overline{11^2}}$, de manera que

$$\dot{\overline{11^2}} = 10^n - 1 = (11-1)^n - 1 =$$
$$11^n - \binom{n}{1}11^{n-1} + \binom{n}{2}11^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}11 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n - 1.$$

Això obliga a que n sigui parell i resulta

$$11^{n-1} - \binom{n}{1}11^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}11 - n = \dot{\overline{11}}$$

o sigui que $n = \dot{\overline{11}}$. El valor de n més petit és 22. Finalment, i com en la primera solució, per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$.

Problema 3. *Sigui α un angle menor que 180°. Demostreu que si $\cos\alpha = p/q$, un nombre racional, llavors existeix un triangle amb els costats enters que té un angle igual a α.*

Primera solució.

Sigui $\cos\alpha = p/q$ amb p, q enters de manera que $-q < p < q$. Considerem el triangle ABC de costats $b = \overline{CA} = 4q$, i $a = \overline{CB} = 4q^2 - (2p-1)^2$, amb angle $\hat{C} = \alpha$. Pel teorema del cosinus tenim

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha = \left(4q^2-(2p-1)^2\right)^2+16q^2-2\cdot 4q\left(4q^2-(2p-1)^2\right)\frac{p}{q} = \left(4q^2-4p^2+1\right)^2,$$

i queda $c = 4q^2 - 4p^2 + 1$, que és un enter.

Segona solució.

Es poden trobat tots els triangles de costats racionals o enters que tinguin un angle igual a α.

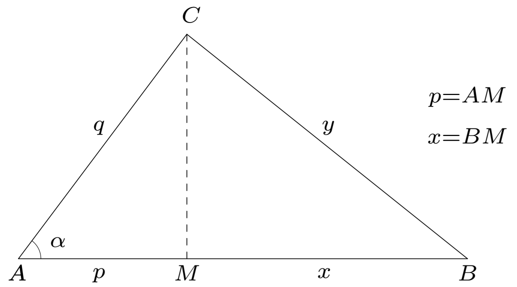


Figura 1 $\quad \alpha < 90^\circ$

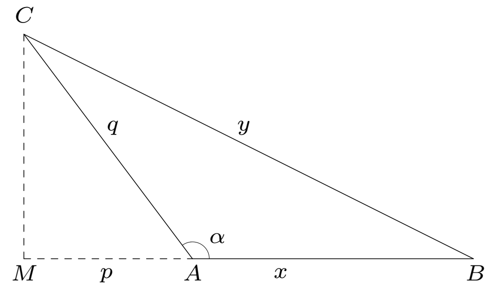


Figura 2 $\quad \alpha > 90^\circ$

Suposarem que $0 < p < q$ i distingirem els dos casos α agut i α obtús.
Si l'angle α és agut (Figura 1), aleshores serà $\cos\alpha = p/q$. Suposem que x, y són racionals. Es compleix que $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$ i que $x > -p$. Així doncs, els punts (x, y) són els punts de coordenades racionals d'una hipèrbola equilàtera, de la qual coneixem els punts racionals $(\pm p, \pm q)$.
Si en una cònica es coneix un punt de coordenades racionals, tots els altres punts de coordenades racionals es troben com a interseccions de la cònica amb una recta de pendent racional que passi pel punt conegut. Tracem una recta de pendent m racional que passi pel punt $(-p, q)$. Tindrà equació $y = q + m(x + p)$. El valor de m pot variar des del valor del pendent de la tangent al punt, fins al valor del pendent de l'asímptota, és a dir, $-p/q < m < 1$ (Figura 3). Busquem les interseccions amb la hipèrbola resolent el sistema $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$, $y = q + m(x + p)$ i prescindim de la intersecció ja coneguda $(-p, q)$, i ens queda l'altra intersecció

$$x = -\frac{2qm + (m^2+1)p}{m^2-1}, \quad y = q - 2m\,\frac{p+qm}{m^2-1}.$$

Per cada valor de m racional obtindrem valors racionals de x, y i un triangle de costats racionals que conté l'angle α. A més, així obtindrem tots els punts de coordenades racionals sobre la hipèrbola. Multiplicant pel denominador comú tindrem un triangle de costats enters.

Si $-p/q < m < 0$ s'obté $x < 0$ i això vol dir que el punt B és a l'esquerra de M (Figura 1), és a dir, obtenim un triangle obtusangle a B. Si $0 < m < 1$ s'obté $x > 0$ i el triangle és acutangle a B.

Si l'angle α és obtús, (Figura 2) serà $\cos\alpha = -p/q$. El raonament serà igual que en el cas anterior però ha de ser $x > p$. Això vol dir que $m > 0$ en el raonament de la hipèrbola.

Per exemple, suposem que $\cos\alpha = 2/5$. Si fem $m = 2/3$ obtenim els valors $x = 118/21$ i $y = 127/28$, d'on resulta el

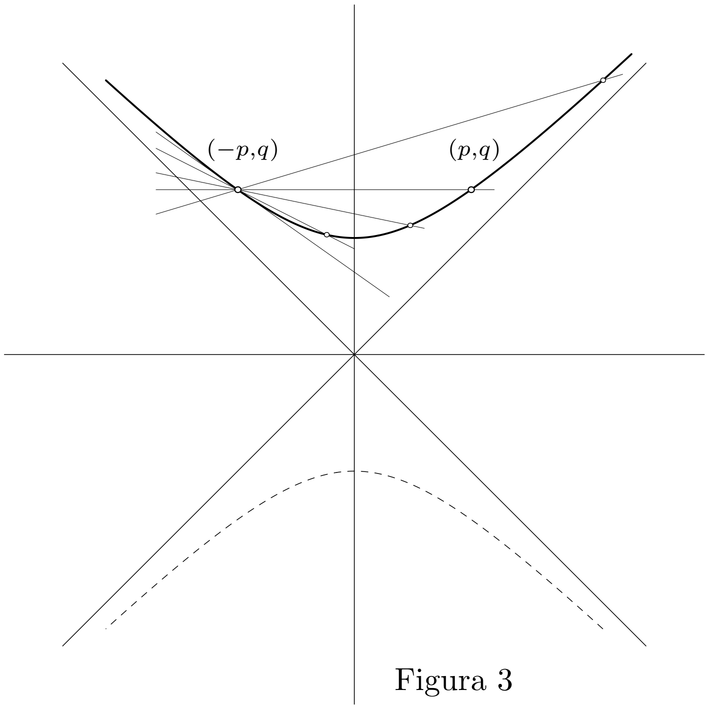
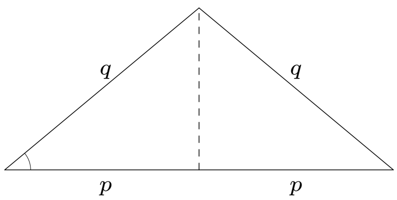


Figura 3

triangle de costats $2 + 118/21$, $127/21$ i 3. Si multipliquem per 21 obtenim el triangle de costats 160, 127 i 63.

Observació.

En el cas de ser $\alpha < 90°$ podem fer $m = 0$ i obtenim $x = p$ i $y = q$. Això dóna lloc al triangle obtingut per simetria respecte de l'altura que es pot intuir directament.



Tercera solució.

L'equació $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$ es pot escriure $(y+x)(y-x) = k = q^2 - p^2 = k > 0$, on k és un enter conegut. Aleshores podem fer $y - x = r$, amb r racional arbitrari, i queda $y + x = k/r$, que també és racional. Surt

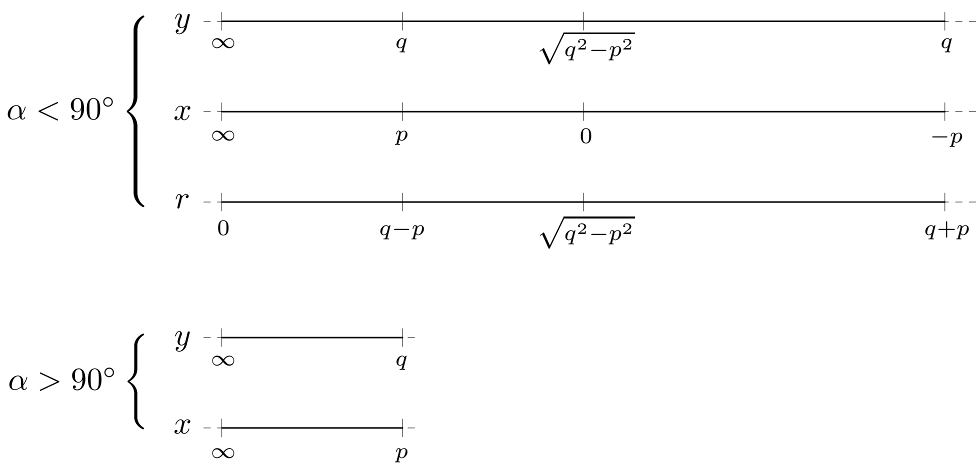
$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{r} + r\right), \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{r} - r\right).$$

Així s'obtenen totes les solucions racionals (x, y). Hem de veure ara els possibles valors que pot prendre r. Com que $y > 0$, ha de ser $r > 0$.

Suposem en primer lloc que $\alpha < 90°$, és a dir, $\cos\alpha = p/q > 0$. Com que ha de ser $x > -p$ que és equivalent a $\frac{k}{r} - r > -2p$, o bé $r^2 - 2pr - k < 0$, resulta $r < q + p$.

Si suposem, en segon lloc, que $\alpha > 90°$, és a dir, $\cos\alpha = -p/q > 0$, resulta $x > p$. Això dóna lloc a $\frac{k}{r} - r > 2p$, o bé $r^2 + 2pr - k < 0$ i $r < q - p$.

Podem fer el diagrama següent que recull tots els casos, segons els valors possibles de r.



Si r s'acosta a 0, els triangle es fa llarg a la dreta (Figures 1 i 2), x i y tendeixen a infinit i l'angle que formen és agut.

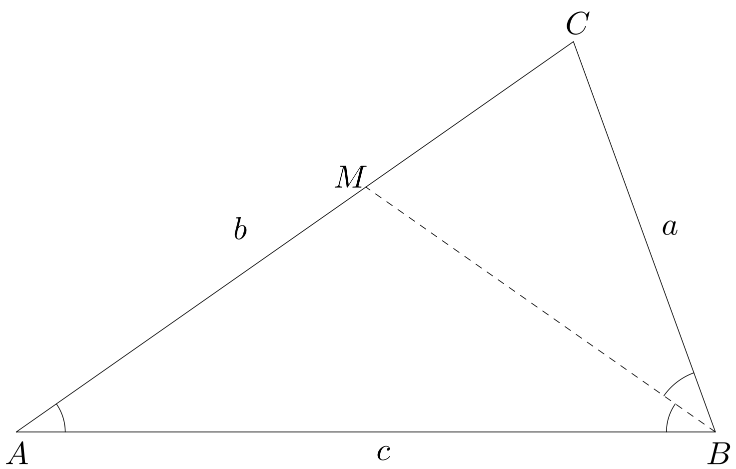
Si $r = q - p$ ens queda el triangle simètric (cas $\alpha < 90°$) o el triangle degenerat (cas $\alpha > 90°$). En aquest darrer cas, r no pot prendre més valors.

Si $r = \sqrt{q^2 - p^2}$ és racional, aleshores obtenim un triangle rectangle solució.

Si $r > \sqrt{q^2 - p^2}$, tenim un triangle obtusangle, amb el punt B a l'esquerra del punt M i l'angle entre x i y obtús. Si $r \to q + p$ tenim $B \to A$ i tendeix al triangle degenerat amb $A = B$.

Problema 4. *Sigui ABC un triangle amb costats a, b, c, respectivament oposats a A, B, C.*
a) Demostreu que si $\hat{B} = 2\,\hat{A}$, aleshores es compleix que $b^2 - a^2 = ac$.
b) El recíproc de l'apartat a), és cert?

Solució.



a) Tracem la bisectriu de l'angle B que talla al costat oposat al punt M. Tindrem

$$\frac{AM}{c} = \frac{MC}{a}.$$

El triangle ABM és isósceles i $MA = MB$. Els triangles ABC i MCB tenen l'angle C en comú i $\hat{A} = \widehat{MBC}$, és a dir, tenen dos (i per tant tres) angles iguals. Són semblants i les relacions de semblança són

$$\frac{MC}{a} = \frac{a}{b} = \frac{MB}{c} = \frac{MA}{c} = \frac{MC + MA}{a + c} = \frac{b}{a + c}.$$

La relació

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a + c}$$

és la de l'enunciat.
b) Recíprocament, suposem que $b^2 - a^2 = ac$, o equivalentment, $a/b = b/(a + c)$. Tracem la bisectriu per B, que talla el costat oposat en el punt M i es compleix

$$\frac{AM}{c} = \frac{MC}{a} = \frac{b}{a + c} = \frac{a}{b}, \quad \text{aquesta última igualtat, per hipòtesi.}$$

Els triangles ABC i MBC tenen l'angle C en comú i els costats adjacents proporcionals per les igualtats anteriors. Per tant són semblants i tenen els angles iguals. Ha de ser $\widehat{CBM} = \hat{A}$ i com que MB era la bisectriu, serà $\hat{B} = 2\hat{A}$.

Problema 5.- *Trobeu tots els nombres enters m, n, solucions de l'equació* $9^m = 4n^2 + 1$.

Primera solució.

No pot ser $m < 0$ ja que el primer membre seria menor que 1 i el segon membre seria més gran o igual que 1.
Si $m = 0$ obtenim la solució $n = 0$.
Si $m > 0$, serà $9^m = \dot{3}$ i podem estudiar la igualtat mòdul 3. Tenim $0 \equiv 4n^2 + 1 \equiv n^2 + 1$, d'on $n^2 \equiv 2$ mòdul 3, i això és impossible, ja que mòdul 3 els únics quadrats són 0 i 1.

Segona solució.

Podem escriure l'equació en la forma

$$3^{2m} - 4n^2 = 1 \quad \text{o bé} \quad (3^m + 2n)(3^m - 2n) = 1.$$

Com que es tracta d'enters, les úniques possibilitats són
a) $3^m + 2n = 1$ i $3^m - 2n = 1$, d'on $3^m = 1$ i $m = 0$
b) $3^m + 2n = -1$ i $3^m - 2n = -1$, d'on $3^m = -1$, absurd.

Problema 6.- *Demostreu que qualsevol políedre convex té almenys una cara que és un polígon de menys de sis costats.*

Solució. Siguin V, A i C el nombre de vèrtexs, arestes i cares, respectivament, d'un políedre. Es compleix la fórmula d'Euler

$$C + V = A + 2.$$

A cada vèrtex hi concorren tres arestes o més i cada aresta connecta dos vèrtexs, d'on

$$A \geq \frac{3V}{2} \quad \text{o bé} \quad V \leq \frac{2A}{3}.$$

Suposem que no es compleix la hipòtesi de l'enunciat, és a dir, que cada cara té sis arestes o més. Aleshores

$$A \geq \frac{6C}{2} \quad \text{o bé} \quad C \leq \frac{A}{3}.$$

Substituint a la fórmula d'Euler queda

$$A + 2 = C + V \leq \frac{A}{3} + \frac{2A}{3} = A$$

i ens queda l'absurd $A + 2 \leq A$.