XXXIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 de desembre de 2002, de 16 a 20h.

1.–Amb dues lletres, a, b, formem les infinites paraules que tenen un nombre finit de lletres i les ordenem alfabèticament.

a) Quines paraules tenen una paraula immediata posterior?

b) Quines paraules tenen una paraula immediata anterior?

c) Demostreu que si una paraula p_1 és anterior a una paraula p_2, i p_2 acaba en b, aleshores entre p_1 i p_2 hi ha paraules acabades en a i paraules acabades en b.

2.–En el pla tenim una recta r, un punt P sobre r i un punt Q fora de la recta r. Per cada punt R de r considerem el nombre

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

a) Busqueu els valors màxim i mínim del nombre λ i digueu on ha d'estar situat el punt R per obtenir aquest màxim i aquest mínim.

b) A quin valor tendeix λ quan R tendeix cap a l'infinit?

3.–Cinc pirates van arribar a una illa deserta i van decidir amagar els seus tresors en un terreny pla on hi havia els cinc arbres més alts de l'illa. Van cavar cinc forats en els vèrtexs d'un pentàgon (convex i no regular). En el punt mitjà de cada costat del pentàgon hi havia un dels cinc arbres. Sobre cada sot hi van plantar un roser.

Quan van tornar a l'illa, per recuperar els tresors no hi havia cap roser. La sequera va marcir els primers brots... Només hi havia els cinc arbres...

Un dels pirates, que recordava coses que havia après de jove, els va dir: No us preocupeu. Recuperarem els tresors!

Va recordar:

a) Donats els punts mitjans dels costats d'un triangle, es poden recuperar els seus vèrtexs.

b) Si coneixem els punts mitjans de tres costats d'un quadrilàter, podem trobar el punt mitjà del quart costat.

c) Raoneu la resposta positiva als apartats *a)* i *b)*. Digueu com van recuperar els pirates el seu tresor, coneixent la resposta positiva de *a)* i *b)*.

4.–En el pla considerem una circumferència i un punt exterior P. Des de P es dibuixen dues rectes tangents a la circumferència en punts A i B. En l'arc més petit AB es considera un punt T i es dibuixa una altra recta tangent per T que talla PA i PB en punts Q i R, respectivament.

Determineu el perímetre del triangle PQR en funció de PA.

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 de desembre de 2002, de 9 a 13h.

5.–Considereu dos polígons regulars de n costats de longitud a, iguals i superposats. Un d'ells es gira un angle π/n radians respecte d'un eix perpendicular al pla que els conté i que passa pel centre dels polígons, i tot seguit, es desplaça paral·lelament segons la direcció de l'eix de gir. A quina distància cal desplaçar el polígon per tal que en unir cada vèrtex d'un amb els dos vèrtexs més propers de l'altre, s'obtinguin com a cares laterals triangles equilàters?

6.–Esbrineu per a quins punts de l'eix d'una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d'aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d'aquests punts als peus de les altres normals.

7.–Sigui ABC un triangle.

a) Determineu els punts P del pla que compleixen

$$\grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(PAB) = \grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(PBC) = \grave{\mathrm{A}}\mathrm{rea}(PCA) \qquad (*)$$

b) Sigui P un punt interior del triangle que compleixi $(*)$, i siguin P_1, P_2, P_3 els punts interiors als triangles PBC, PCA, PAB en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ en funció de l'àrea del triangle ABC.

8.–Un jugador de tenis vol enfrontar-se a dos rivals A i B per adquirir prestigi amb bons resultats. La probabilitat de guanyar al jugador A és més petita que la de guanyar a B perquè el primer és de més categoria. Li ofereixen tres partits, dels quals n'ha de guanyar al menys dos de seguits, i pot triar la seqüència dels contraris: o bé $A-B-A$, o bé $B-A-B$.

Quina seqüència de partits li és més favorable?

XXXIX OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 i 14 de desembre de 2002.

Solucions:

1.–

a) Totes les paraules tenen immediata posterior. La immediata posterior de la paraula $\mathcal{P} = x_1x_2\cdots x_n$ és $\mathcal{P}a = x_1x_2\cdots x_n\,a$. $(x_i \in \{a,b\})$.

b) Les acabades en a tenen immediata anterior. La immediata anterior de $\mathcal{P}a$ és $\mathcal{P}$. Les acabades en b no tenen immediata anterior ja que abans de $\mathcal{P}b$ hi ha, per exemple, les infinites $\mathcal{P}a\mathcal{Q}$, on $\mathcal{Q}$ és una paraula qualsevol.

c) Siguin les paraules $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ on $\mathcal{P}_1 = x_1x_2\cdots x_r$ i $\mathcal{P}_2 = y_1y_2\cdots y_s\,b$, i les x_i i les y_j són lletres a o b $(x_i, y_j \in \{a,b\})$. Si $\mathcal{P}_1$ és anterior a $\mathcal{P}_2$ haurà de ser, o bé

$$x_1 = y_1,\quad x_2 = y_2,\ \ldots\ x_j = y_j,\ x_{j+1} = a,\ y_{j+1} = b,$$

o bé

$$x_1 = y_1,\quad x_2 = y_2,\ \ldots\ x_r = y_r.$$

En el primer cas tenim $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}a\mathcal{Q}_1$ i $\mathcal{P}b\mathcal{Q}_2b$, on $\mathcal{Q}_1$i $\mathcal{Q}_2$ són paraules eventualment buides, i $\mathcal{P} = x_1x_2\ldots x_j = y_1y_2\ldots y{*}_j$.

Les paraules $\mathcal{P}a\mathcal{Q}_1a$ i $\mathcal{P}a\mathcal{Q}_1b$ estan entre les dues

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}a\mathcal{Q}_1 < \mathcal{P}a\mathcal{Q}_1a < \mathcal{P}a\mathcal{Q}_1b < \mathcal{P}b\mathcal{Q}_2b = \mathcal{P}_2.$$

En el segon cas $\mathcal{P}_1$ és prefix de $\mathcal{P}_2$ i ha de ser $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}b$ on $\mathcal{Q}$ és una paraula eventualment buida. Les paraules $\mathcal{P}_1\mathcal{Q}a$ i $\mathcal{P}_1\mathcal{Q}ab$ estan entre les dues

$$\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_1\mathcal{Q}a < \mathcal{P}_1\mathcal{Q}ab < \mathcal{P}_1\mathcal{Q}b = \mathcal{P}_2.$$

2.–

2.1.–PRIMERA SOLUCIÓ:

Per la pròpia definició, $\lambda \geq 1$. Si $R = P$ surt $\lambda = 1$ i aquest és l'únic punt on pot valer 1. Per tant, 1 és el mínim de λ.

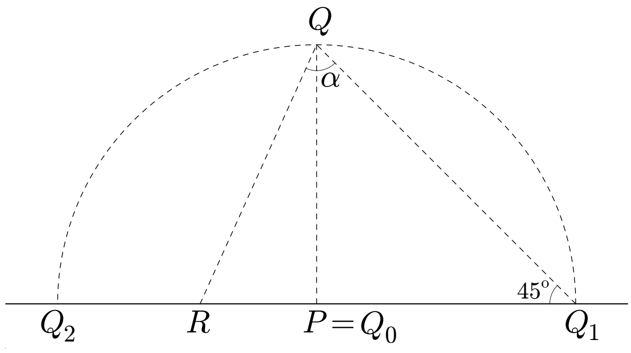
Sigui Q_0 la projecció ortogonal de Q sobre la recta r. Hem de distingir dos casos segons si $Q_0 = P$ o $Q_0 \neq P$.

Cas 1.- $Q_0 = P$

En aquest cas els punts simètrics respecte de P donen el mateix valor de λ. Siguin Q_1 i Q_2 tals que $PQ_1 = PQ_2 = PQ$. Aleshores $PR + PQ = RQ_1$ i per tant

$$\lambda = \frac{RQ_1}{QR} = \frac{\sin\alpha}{\sin 45°}$$

que té el màxim per $\alpha = 90°$ i $\lambda = 1/\sin 45° = \sqrt{2}$, $R = Q_2$. Anàlogament $R = Q_1$ dóna també el mateix valor i és un altre màxim.

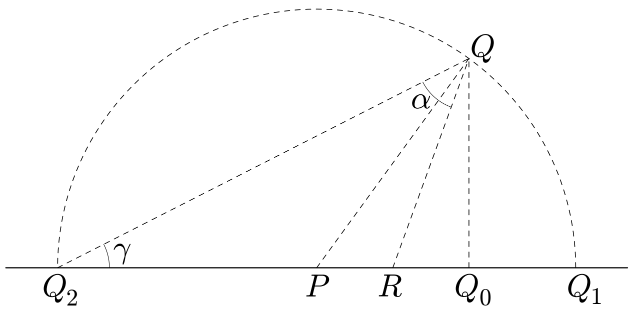


Quan $R \to \infty$ tenim que $\alpha \to 180° - 45°$ i $\lambda \to 1$.

Cas 2.- $Q_0 \neq P$

En aquest cas cal distingir dues situacions.

Cas 2.a.- R i Q_0 són al mateix costat de P.

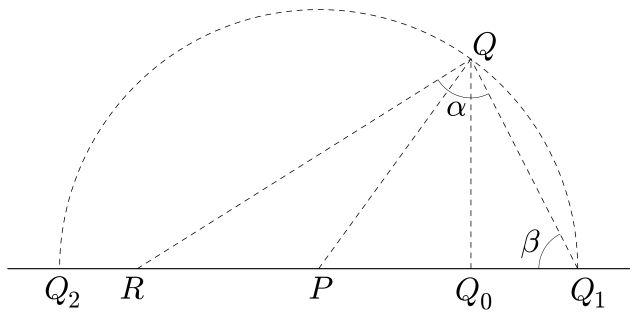


$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR} = \frac{Q_2R}{QR} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

que té el màxim per a $\alpha = 90°$, $R = Q_1$ i $\lambda = 1/\sin\gamma$.

Cas 2.b.- P està entre R i Q_0.

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR} = \frac{Q_1R}{QR} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



que té el màxim per a $\alpha = 90°$, $R = Q_2$ i $\lambda = 1/\sin\beta$.

En el cas 2, els màxims corresponents a $R = Q_1$ i $R = Q_2$ no són iguals. Com que $\sin\gamma < \sin\beta$, serà $1/\sin\beta < 1/\sin\gamma$ i el màxim és $1/\sin\gamma$ que correspon a $R = Q_1$.

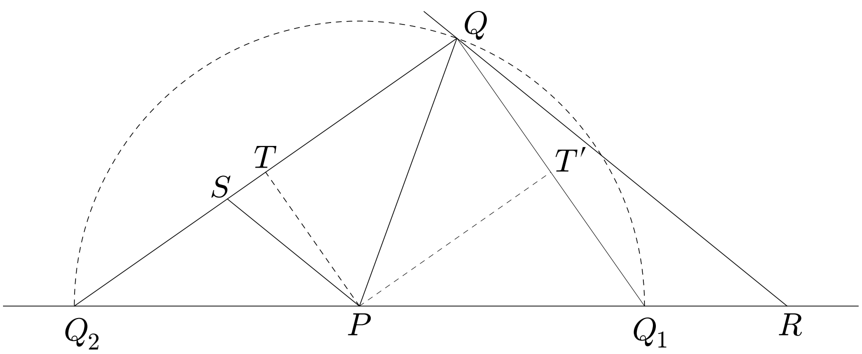
Tant en un cas com en l'altre, quan $R \to \infty$, $\alpha \to 180° - \gamma$ o $180° - \beta$ i $\lambda \to 1$.

2.2.– Segona solució:

La circumferència de centre P que passa per Q talla la recta r en els punts Q_1 i Q_2. Suposem que R és a la mateixa semirecta d'origen P que la projecció de Q sobre r. Unim R amb Q i tracem una paral·lela per P que talla el segment QQ_2 en el punt S. Tenim

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR} = \frac{PR + PQ_2}{QR} = \frac{Q_2R}{QR} = \frac{Q_2P}{PS}$$

on la última igualtat surt pel teorema de Thales.



Com que Q_2P és constant, els extrems de λ corresponen a extrems (contraris) de PS. El mínim de λ tindrà lloc al màxim de PS, que correspon al cas que $S = Q$, cosa que exigeix $R = P$ i dóna $\lambda = 1$.

El màxim de λ tindrà lloc quan PS sigui mínim, és a dir, quan $S = T$ el peu de la perpendicular traçada des de P al segment Q_2Q. En aquest cas ha de ser QR

perpendicular a Q_2Q i per tant ha de ser $R = Q_1$, que dóna $\lambda = \dfrac{Q_2Q_1}{QQ_1}$. Si R estigués situat a l'altre costat, aleshores s'hauria de fer una construcció equivalent *mutatis mutandis* i ens donaria un altre màxim a $R = Q_2$ (corresponent al punt T'). El més gran de tots dos és el màxim absolut i correspon a la menor de les dues distàncies PT i PT'. En el cas que PQ sigui perpendicular a r, els dos màxims tenen el mateix valor.

Si fem tendir R a infinit, el pendent de la recta QR tendeix a 0, la de la paral·lela PS també, i el punt S tendeix a Q_2, de manera que $\lambda \to 1$.

2.3.– Tercera solució:

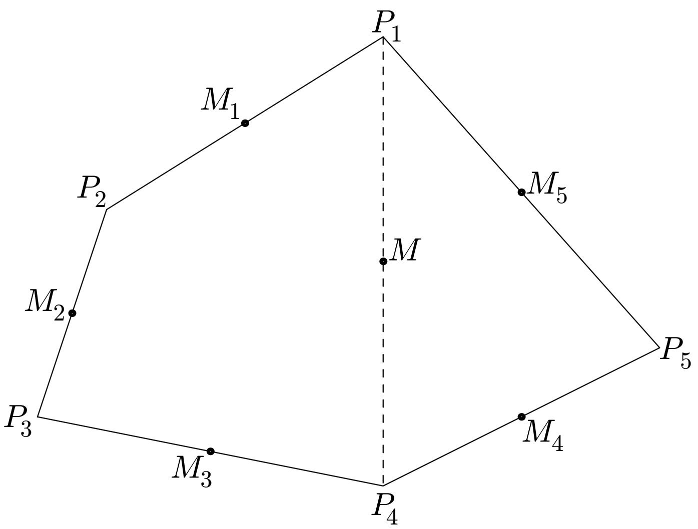
També es pot resoldre el problema buscant els extrems de la funció λ en funció d'un paràmetre sobre la recta.

3.–

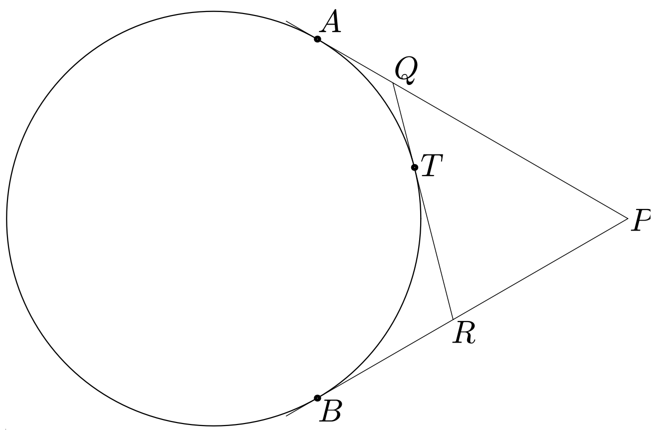
a) Siguin M_a, M_b i M_c els punts mitjans d'un triangle ABC. Traçant per M_a una paral·lela al segment M_bM_c tenim la recta que conté el costat BC del triangle. Podem fer el mateix amb M_b i M_c i reconstruïm el triangle.

b) Cal recordar que els punts mitjans d'un quadrilàter formen un paral·lelogram i si en tenim tres vèrtexs podem trobar-ne el quart.

c) Per *b)* podem trobar M ja que $P_1P_2P_3P_4$ és un quadrilàter del qual coneixem els punts mitjans M_1, M_2, M_3. Per *a)*, coneguts M_4, M_5 i M, podem trobar P_4, P_5 i P_1. El simètric de P_1 respecte de M_1 és P_2 i el de P_2 respecte de M_2 és P_3.



4.–Tenim $PQ+QR+RP = PQ+QT+TR+RP = PQ+QA+BR+RP = PA+PB = 2PA$.



5.–Considerem un polígon inscrit en una circumferència de radi R de manera que dos vèrtexs consecutius siguin (en coordenades cartesianes espacials)

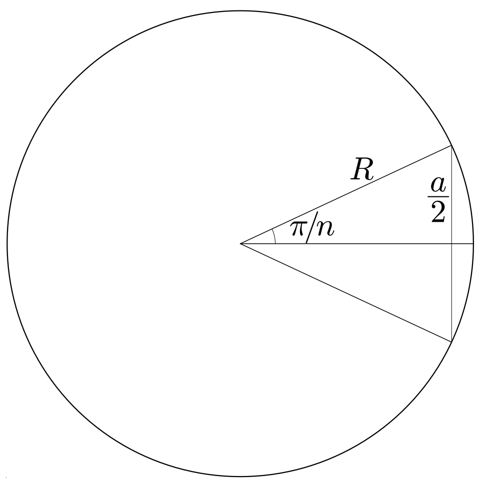
$$(R\cos\pi/n, R\sin\pi/n, 0) \quad \text{i} \quad (R\cos\pi/n, -R\sin\pi/n, 0).$$

Així, el vèrtex de sobre serà $(R, 0, d)$, essent d la distància demanada. Igualant distàncies, s'obté

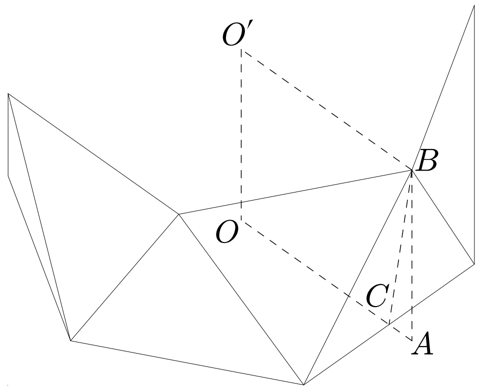
$$\left(2R\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 = R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + R^2\sin^2\frac{\pi}{n} + d^2.$$

Però, com que $a/2R = \sin\pi/n$, s'obté finalment

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left(1+\cos\frac{\pi}{n} - 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right)$$



També es pot resoldre el problema resolent simplement un triangle rectangle ABC, rectangle en A, que té el catet CA igual a la diferència entre el radi i l'apotema del polígon, l'altre catet $AB = d$, la distància demanada, i la hipotenusa $BC = a\sqrt{3}/2$ igual a l'altura del triangle equilàter lateral, (essent a el costat del polígon donat).



6.–Si $y = ax^2$ és la paràbola, consideri's un punt (x_0, ax_0^2) d'aquesta. La normal per aquest punt talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, ax_0^2 + 1/2a)$. Així, doncs, pels punts $(0, y)$ amb $y > 1/2a$ es poden traçar tres normals. La longitud dels segments normals "no verticals" és

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}}$$

i ara només cal provar que

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}} < ax_0^2 + \frac{1}{2a},$$

que es demostra elevant al quadrat.

7.–Un triangle divideix el pla en 7 regions: una fitada $\mathcal{I}$ (interna), i sis no fitades, tres de tipus $\mathcal{R}$ i tres de tipus $\mathcal{S}$. (figura 1)

A les regions de tipus $\mathcal{R}$ no hi pot haver cap punt que compleixi la propietat ja que Àrea$(PAC) <$ Àrea(PAB). (figura 2)

Busquem els punts de les regions $\mathcal{S}$. Els triangles PAB i PAC tenen la mateixa base PA i la mateixa àrea. Per tant, han de tenir la mateixa altura i això exigeix que la recta PA sigui paral·lela a la recta BC.

Anàlogament, la recta PC ha de ser paral·lela a la AB, i el punt P és quart el vèrtex d'un paral·lelogram que té els altres tres vèrtexs a A, B i C. (figura 3 i figura 4)

Sigui P un punt interior que compleixi la condició, i M el punt mitjà de BC. Es compleix que Àrea$(PCM) =$ Àrea(PMB), i com que, per hipòtesi és Àrea$(PAC) =$

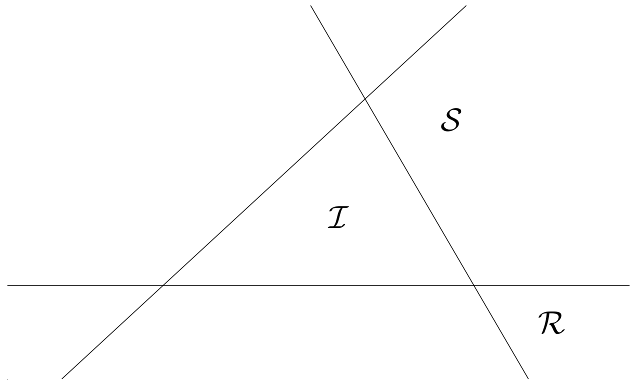


Fig.1.

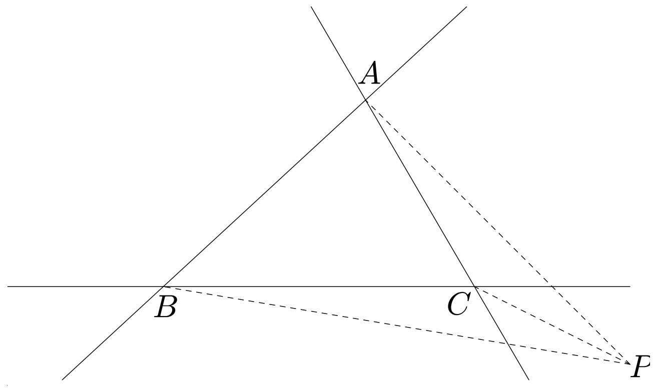


Fig.2.

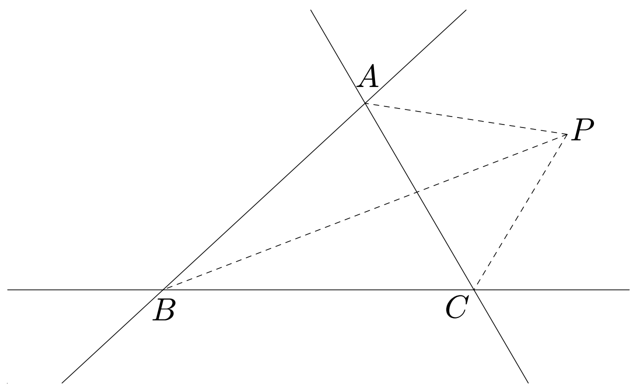


Fig.3.

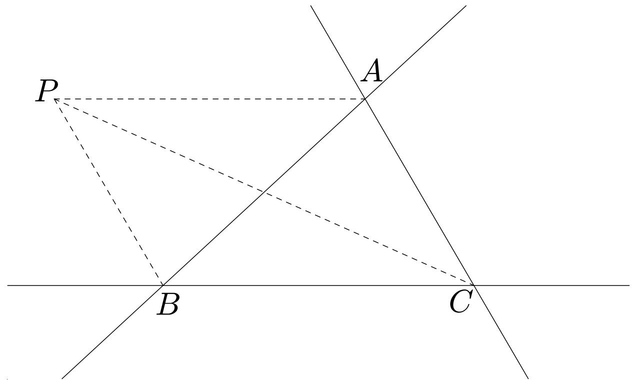


Fig.4.

Àrea(PAB) resulta que

$$\text{Àrea}(PAC) + \text{Àrea}(PCM) = \text{Àrea}(PAB) + \text{Àrea}(PMB) = \frac{1}{2}\text{Àrea}(ABC).$$

Per altra banda,

$$\text{Àrea}(ACM) = \text{Àrea}(ABM) = \frac{1}{2}\text{Àrea}(ABC)$$

i per tant P ha d'estar sobre la mitjana AM, i en conseqüència, P ha de ser el baricentre de ABC. (figura 5)

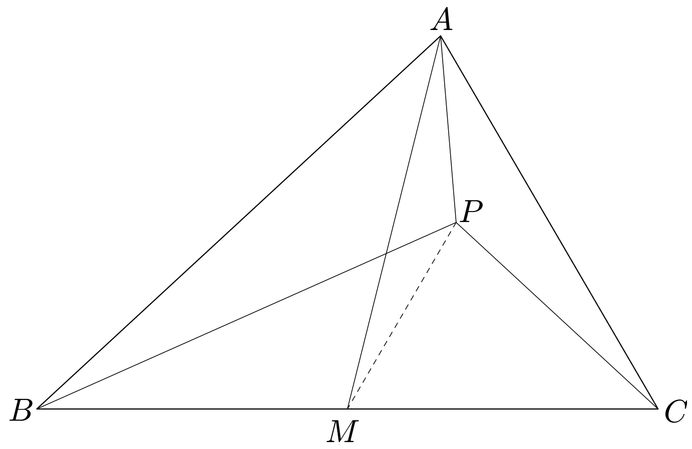


Fig.5.

Tenim les igualtats de segments: $PP_A = 2/3PM = 2/9AM$, però com que $AP = 2/3AM$ resulta $PP_A = 1/3PA$. El triangle $P_AP_BP_C$ és homotètic del ABC amb centre P i raó $-\frac{1}{3}$. Per tant Àrea$(P_AP_BP_C) = \frac{1}{9}$Àrea$(ABC)$. (figura 6).

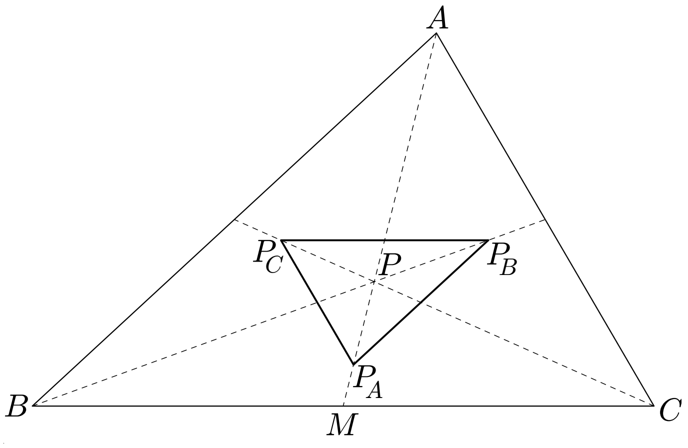


Fig.6.

8.–En la seqüència $A - B - A$ la probabilitat de guanyar dos partits seguits és

$$p_a p_b + (1 - p_a) p_b p_a = 2 p_a p_b - p_a^2 p_b.$$

En la seqüència $B - A - B$ la probabilitat és

$$p_b p_a + (1 - p_b) p_a p_b = 2 p_a p_b - p_a p_b^2.$$

Si $p_a < p_b$, la primera és més gran que la segona.