# XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

## Primera fase (Catalunya)

*14 de desembre de 2001, de 16 a 20h.*

**1.**–Trobeu tots els polinomis $p(x)$ tals que $p\left(x^2\right) = (p(x))^2$.

**2.**–Un rectangle de costats 20 cm i 15 cm té un vèrtex situat en el centre d'una circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtexs del rectangle

**3.**–Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1, 2, 3, \ldots, 10^9\}$ n'hi ha més que contenen la xifra 9 o més que no la contenen.

**4.**–Trobeu el mínim nombre natural $n$ que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n + 1$ és múltiple de 5, $n + 2$ és múltiple de 7, $n + 3$ és múltiple de 9 i $n + 4$ és múltiple de 11.

# XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

## Primera fase (Catalunya)

*15 de desembre de 2001, de 9 a 13h.*

**5.**–Demostreu que si $x$ i $y$ són dos nombres reals tals que $\sin x - \sin y = x - y$, llavors necessàriament $x = y$.

**6.**–

*a)* Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre del triangle, $P$, l'àrea del triangle, $A$, i el radi $R$ del cercle inscrit satisfan $R \cdot P = 2A$.

*b)* D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.

**7.**–Tenim unes partícules sobre la recta que cada any esclaten, totes alhora, i cadascuna d'elles es converteix en dues que van a parar a un costat i a l'altre, a un metre de distància de la que ha esclatat. Quan a un mateix punt hi van a parar dues partícules, es destrueixen i desapareixen. Si a l'any 0 només hi havia una partícula, situada en el punt 0 de la recta, quantes partícules hi haurà l'any 2001, després que hagin esclatat?

**8.**–

*a)* Tenim un cub i pintem a l'atzar 3 cares de color vermell i 3 cares de color groc. Calculeu la probabilitat que les tres cares de color vermell tinguin un vèrtex en comú.

*b)* Tenim 8 cubs de la mateixa mida, cadascun pintat a l'atzar amb tres cares de color vermell i tres cares de color groc. Els col·loquem aleatòriament, de manera que formin un cub més gros. Quina és la probabilitat que totes les cares exteriors d'aquest cub siguin del mateix color?

*c)* I si ho fem amb 27 cubs?

# XXXVIII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

## Primera fase (Catalunya)

*14 i 15 de desembre de 2001.*

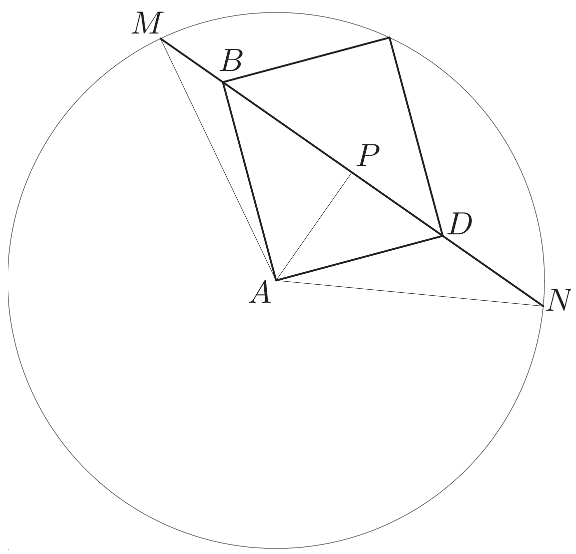
# Solucions:

**1.**–Escrivim $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Si tots els coeficients són nuls, tenim el polinomi $p(x) = 0$ que compleix la condició. Sigui, doncs, $a_n \neq 0$. Suposem que hi ha algun altre coeficient no nul. Sigui $a_k$ l'immediat no nul anterior a $a_n$, és a dir, $a_k \neq 0$ i $a_i = 0$ si $k < i < n$. Aleshores el polinomi $(p(x))^2$ conté el terme no nul $2a_ka_nx^{k+n}$ i el polinomi $p(x^2)$ no el conté, ja que $p(x)$ no pot tenir el terme en $x^{\frac{1}{2}(n+k)}$. Per tant ha de ser $a_k = 0$ per a tot $k < n$ i $p(x)$ ha de ser un monomi, $ax^n$. Com que s'ha de complir $a^2 = a$, ha de ser $a = 0$ o bé $a = 1$. Les úniques possibilitats són $p(x) = 0$ (que ja havíem trobat abans), $p(x) = 1$ i $p(x) = x^n$ amb $n \geq 1$.

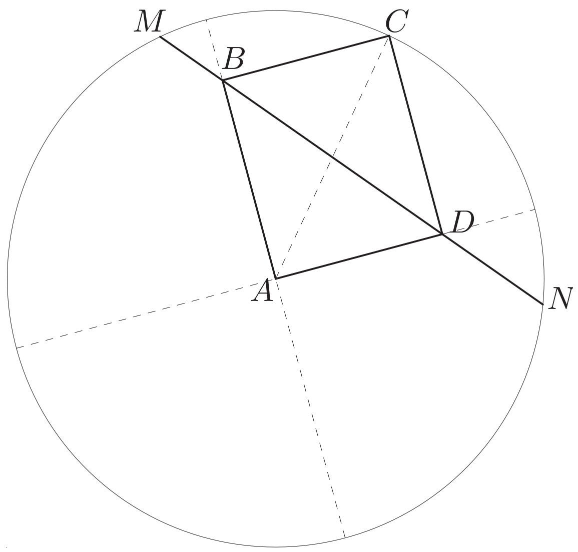
**2.**–Posem $AD = 15$; $AB = 20$. Pel teorema de Pitàgores es dedueix de seguida que el radi del cercle és $AC = 25$.

**2.1.**–*Solució 1:*




En el triangle rectangle $BAD$, el segment $AP$ és l'altura sobre la hipotenusa, que fa 25 perquè és igual al radi del cercle. Calculant l'àrea del triangle $ABD$ ens surt $PA \cdot BD = AD \cdot AB$, d'on $PA = 20 \cdot 15/25 = 12$. La meitat de la corda buscada, $PN$, es pot calcular pel teorema de Pitàgores en el triangle rectangle $PAN$. Surt $PN = \sqrt{481}$ i obtenim que la corda $MN = 2\sqrt{481}$.

**2.2.**– *Solució 2:*




Posem $DN = x$, $MB = y$. Si calculem la potència del punt $D$ respecte de la circumferència fent servir la corda $MN$ i la que perllonga el costat $AD$, tindrem $y(x+25) = 10 \cdot 40$. Semblantment, per a la potència del punt $B$ tindrem $y(x+25) = 4 \cdot 45$. Si resolem el sistema format per aquestes dues equacions trobem $x = \sqrt{481} - 9$ ; $y = \sqrt{481} - 16$, i d'aquí, $MN = x + y + 25 = 2\sqrt{481}$.

**3.**–En lloc dels nombres $1, 2, \ldots, 10^9$ podem considerar els nombres

$$0, 1, 2, \ldots, 999\,999\,999$$

o sigui, tots els nombres de nou xifres (posant zeros a l'esquerra dels nombres de menys de nou xifres). N'hi ha $10^9$.

D'aquests, sense la xifra 9 n'hi ha $9^9$. Ara bé,

$$\frac{10^9}{9^9} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^9 = 1 + 9 \cdot \frac{1}{9} + \cdots > 2.$$

Per tant, n'hi ha més amb la xifra 9 que sense.

**4.**–

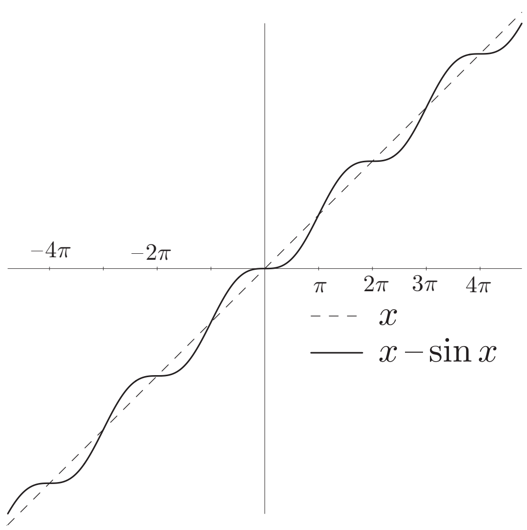
**4.1.**– *Solució 1:* La solució és $n = 1734$. Es pot trobar amb aritmètica de congruències (restes xineses) o senzillament per tempteig. Per trobar-la per tempteig, es pot raonar de la manera següent:

La condició que $n$ sigui múltiple de 3 és redundant si imposem que $n+3$ sigui múltiple de 9, i per tant podem deixar-la de banda. La primera aparició d'un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius és 20, 21. Anem-hi sumant $5 \cdot 7 = 35$ les vegades que calgui (amb la qual cosa seguirem tenint un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius) fins que el nombre següent sigui un múltiple de 9. Així s'arriba, en quatre intents, a 160, 161, 162. Ara anem-hi sumant $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ fins a aconseguir que el nombre següent sigui un múltiple de 11. Després de cinc intents s'arriba a 1735, 1736, 1737, 1738, que és la solució mínima al problema plantejat.

**4.2.–** *Solució 2:* Observem que $n$ ha de complir $n \equiv -1 \bmod 5$, $n \equiv -2 \bmod 7$, $n \equiv -3 \bmod 9$ i $n \equiv -4 \bmod 11$. Els residus es van incrementant en $-1$ i els mòduls en 2. Això ens permet multiplicar per 2 les quatre congruències (2 és primer amb tots els mòduls) i posar $2n \equiv -2 \equiv 3 \bmod 5$, $2n \equiv -4 \equiv 3 \bmod 7$, $n \equiv -6 \equiv 3 \bmod 9$ i $n \equiv -8 \equiv 3 \bmod 11$. És a dir, $2n-3$ és un múltiple comú de 5, 7, 9, i 11, i per tant del mínim comú múltiple 3465. Tenim $2n-3 = 3465k$, o bé $2n = 3465k+3$ i per a $k=1$ obtenim el mínim valor, que és $2n = 3468$, $n = 1734$.

**4.3.–** *Solució 3:* La solució pel mètode de les restes xineses s'obté plantejant el problema com el sistema d'equacions $n+1 \equiv 0 \text{ mod } 5$, $n+2 \equiv 0 \text{ mod } 7$, $n+3 \equiv 0 \text{ mod } 9$, $n+4 \equiv 0 \text{ mod } 11$. Això és el mateix que $n \equiv 4 \text{ mod } 5$, $n \equiv 5 \text{ mod } 7$, $n \equiv 6 \text{ mod } 9$, $n \equiv 7 \text{ mod } 11$. Les dues primeres equacions són equivalents a $n \equiv 19 \text{ mod } 35$. Aquesta i la tercera són equivalents a $n \equiv 159 \text{ mod } 315$. Aquesta i la quarta són equivalents a $n \equiv 1734 \text{ mod } 3465$. Aquesta última congruència expressa, de fet, el conjunt de totes les solucions del problema.

**5.–**




Escrivim la igualtat donada com $x - \sin x = y - \sin y$. D'aquesta manera, el problema es redueix a demostrar que la funció $f(x) = x - \sin x$ és injectiva. De fet, és una funció estrictament creixent, ja que la seva derivada és $f'(x) = 1 - \cos x$, que és positiva a tot arreu excepte en punts aïllats.

**6.–**

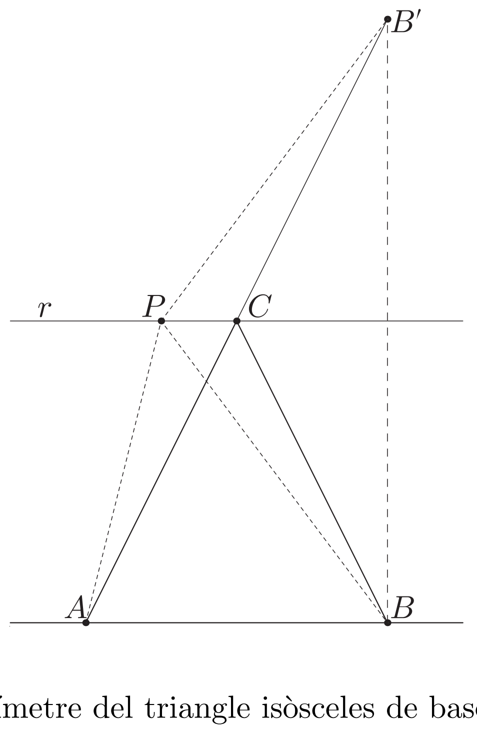
*a)* Si unim amb segments l'incentre del triangle a cadascun dels vèrtexs, es formen tres triangles. Tots ells tenen altura $R$ i les seves bases respectives són les longituds dels costats del triangle, que anomenarem $X$, $Y$ i $Z$. Per tant, l'àrea del triangle gran és igual a

$$A = \frac{1}{2} R \cdot X + \frac{1}{2} R \cdot Y + \frac{1}{2} R \cdot Z = \frac{1}{2} R \cdot P.$$

Aquest resultat es fa servir per resoldre la segona part del problema:

*b)* D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, el que té el cercle inscrit d'àrea màxima és el que té el radi $R$ màxim, i per tant és el de perímetre mínim, ja que $R \cdot P = 2A = 1$.

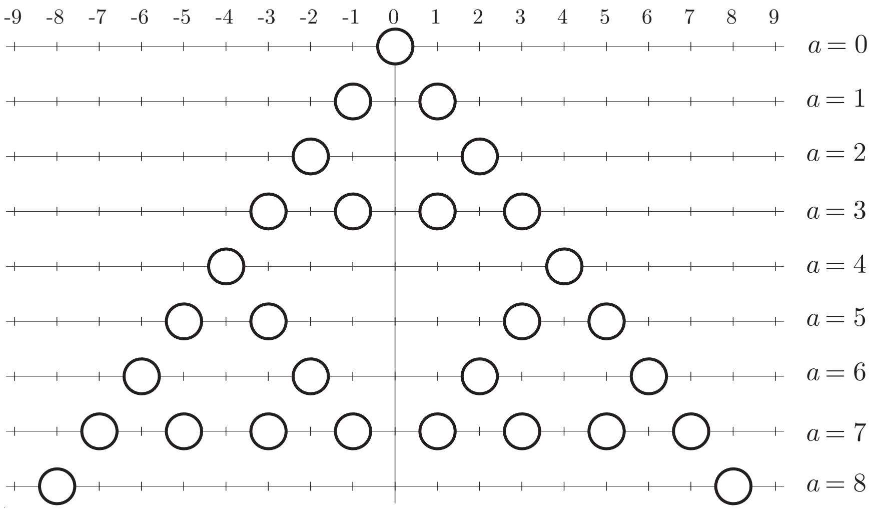
El triangle de base 1 i altura 1 que té el perímetre mínim és l'isòsceles. En efecte, si $A$ i $B$ són els vèrtexs de la base i tracem la recta $r$ paral·lela a distància 1, el tercer vèrtex estarà sobre $r$. Si $B'$ és el simètric de $B$ respecte de $r$, la suma de distàncies $PA + PB$ d'un punt $P$ qualsevol de la recta als punts $A$ i $B$ és $PA + PB = PA + PB' \leq AB'$. Per tant el mínim s'assolirà al punt $C$ d'intersecció del $AB'$ amb la recta $r$. El triangle $ABC$ resulta isòsceles.




Vist això, el perímetre del triangle isòsceles de base 1 i altura 1 és $1 + \sqrt{5}$. La relació $R \cdot P = 1$ ens dóna el radi $R$ i resulta que l'àrea $\pi R^2$ del cercle és igual a

$$\frac{1}{8}\pi\left(3-\sqrt{5}\right)$$

**7.**–Les posicions de les partícules en els primers anys són les següents:




Veiem que per a $n = 0, 1, 2$, a l'any $2^n$ hi ha dues partícules situades en els punts $\pm 2^n$.

Suposem que això és cert fins a $n = k$. A l'any $2^k + 2^k$ la partícula situada en el punt $-2^k$ haurà donat lloc a dues partícules situades en els punts $-2^k - 2^k$ i $-2^k + 2^k = 0$, i la partícula situada en el punt $2^k$ haurà donat lloc a dues partícules situades en els punts $2^k + 2^k$ i $2^k - 2^k = 0$. Les dues partícules situades en el punt 0 es destrueixen i a l'any $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ hi haurà dues partícules situades en els punts $\pm 2^{k+1}$.

Amb això podem afirmar que, per a tot $n$, a l'any $2^n$ hi haurà dues partícules situades en els punts $\pm 2^n$. Ara bé,

$$2001 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 1$$

i amb el que hem vist tenim que

- a l'any $2^{10}$ hi ha 2 partícules en els punts $\pm 2^{10}$;
- a l'any $2^{10} + 2^9$ hi ha 4 partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9$;
- a l'any $2^{10} + 2^9 + 2^8$ hi ha 8 partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9 \pm 2^8$; etc.

Per tant, a l'any 2001 hi ha $2^7 = 128$ partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9 \pm 2^8 \pm 2^7 \pm 2^6 \pm 2^4 \pm 1$.

Observem que el nombre de partícules que hi haurà a l'any $a$ serà 2 elevat a la suma de les xifres de $a$ escrit en base 2.

**8.–**

*a)* Podem imaginar les cares del dau numerades de 1 a 6 com és habitual, és a dir, amb les cares oposades sumant 7.

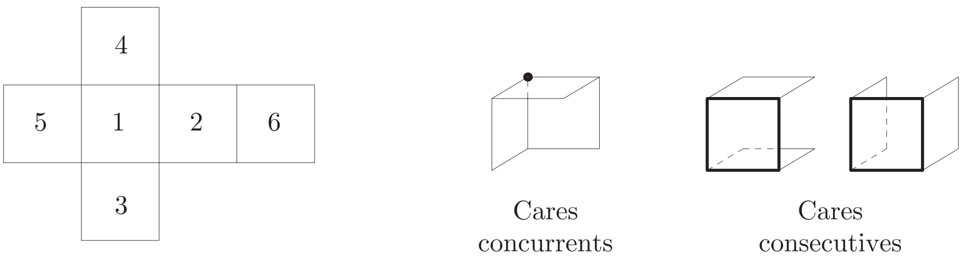
Llavors, si hem d'escollir tres cares per pintar-les vermelles (les altres ja seran grogues) el nombre de maneres de fer-ho és

$$\binom{6}{3} = PR^{6}_{3,3} = 20.$$

D'aquestes 20 maneres n'hi ha ha 8 (una per cada vèrtex) amb les cares vermelles *concurrents* (i en cada cas, també ho seran les grogues). Concloem que, suposat que un dau té tres cares vermelles i tres grogues, la probabilitat que les tres cares del mateix color siguin concurrents és

$$p(\text{concurrents}) = \frac{2}{5}.$$

També es pot veure que les configuracions amb tres cares vermelles "consecutives" (i en cada cas, també ho seran les grogues) venen determinades per la cara central, que pot ocupar 6 posicions en el cub, i per cada possible cara hi ha encara dues posicions. En total hi ha 12 posibles configuracions amb cares consecutives.




Cares concurrents

Cares consecutives

Com a camí alternatiu, es poden escriure totes les possibilitats. Per exemple, amb la numeració habitual dels daus, tal com mostra la figura, tenim les 20 possibilitats de pintar 3 cares vermelles i 3 grogues, en dues columnes. La de l'esquerra correspon a cares concurrents en un vèrtex. Les de la dreta a cares consecutives (en negreta hi ha la indicació de la cara central de les vermelles).

$V$ indica cara vermella i $G$ cara groga.

Cares concurrents

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | $G$ |
| $G$ | $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $G$ | $V$ | $G$ | $V$ | $G$ |
| $G$ | $V$ | $G$ | $V$ | $G$ | $V$ |
| $G$ | $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | $V$ |
| $V$ | $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | $G$ |
| $G$ | $G$ | $V$ | $G$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $G$ | $V$ | $G$ | $G$ |

Cares consecutives

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | $V$ | $G$ | **1** |
| $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | $G$ | $V$ | **6** |
| $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | $G$ | $V$ | **2** |
| $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | $V$ | $G$ | **5** |
| $V$ | $G$ | $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | **5** |
| $G$ | $V$ | $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | **2** |
| $G$ | $V$ | $V$ | $G$ | $V$ | $G$ | **3** |
| $V$ | $G$ | $G$ | $V$ | $G$ | $V$ | **4** |
| $V$ | $G$ | $V$ | $V$ | $G$ | $G$ | **1** |
| $G$ | $V$ | $G$ | $G$ | $V$ | $V$ | **6** |
| $V$ | $G$ | $V$ | $G$ | $G$ | $V$ | **3** |
| $G$ | $V$ | $G$ | $V$ | $V$ | $G$ | **4** |

També trobem, és clar, la probabilitat $2/5$ enunciada per a les cares concurrents. Alhora podem observar que ens altres 12 cubs, les cares del mateix color són "consecutives", l'una a continuació de l'altra. Serà, doncs, $p(\text{consecutives}) = 3/5$.

*b)* En primer lloc s'observa que, a fi i efecte que totes les cares exteriors d'un cub format per l'apilonament de 8 cubs petits siguin del mateix color, necessàriament els 8 cubs que agafem per posar com a vèrtexs del cub gran han de tenir les tres cares vermelles concurrents en un vèrtex (i les tres cares grogues, també). Per tant, cada un dels 8 cubs ha de ser del tipus de cares de mateix color "concurrents", i en aquest cas el vèrtex només pot estar en una de les 8 posicions que pot ocupar el vèrtex d'un cub petit en el seu forat. La probabilitat que aquestes coses passin és

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8}\right)^8 = \frac{1}{20^8}.$$

Si féssim el mateix raonament per a les cares grogues, tindríem la mateixa probabilitat. Llavors, la probabilitat total que les cares exteriors del cub $2 \times 2 \times 2$ siguin del mateix color és

$$p = \frac{2}{20^8}.$$

*c)* Per al cub format amb 27 cubs petits, que tindrà dimensions $3 \times 3 \times 3$, comptarem la probabilitat que totes les cares exteriors siguin vermelles i al final multiplicarem per 2 el resultat pel cas que siguin grogues.

*1)* Els 8 cubs en posició de vèrtex del cub gran. Només poden tenir una posició correcta per compondre el cub gran. La probabilitat que ens mostrin totes les cares de color vermell és, raonant com abans,

$$p_1 = \frac{1}{20^8}.$$

*2)* Els 12 cubs en posició central d'una aresta. Poden haver estat triats dels concurrents o dels consecutius. En el primer cas (amb probabilitat 2/5) només mostra dues cares vermelles en 2 de les 8 possibles posicions en que pot entrar en el seu forat; la probabilitat que mostri les dues cares vermelles és 1/4. Si s'hagués triat d'entre els consecutius (amb probabilitat 3/5), només mostraria dues cares vermelles en 2 de les 12 posicions possibles, i això tindria probabilitat 1/6. En total, doncs, la probabilitat que en una de les posicions centrals de l'aresta es vegin dues cares vermelles és

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{5},$$

i si això ha de succeir en els 12 cubs, tindrem

$$p_2 = \frac{1}{5^{12}}.$$

*3)* Els 6 cubs en posició central d'una cara. Estigui pintat com estigui, un cub amb tres cares vermelles i tres de grogues té una probabilitat 1/2 de mostrar una cara vermella. Si ho han de complir tots sis, tindrem

$$p_3 = \frac{1}{2^6}.$$

*4)* El cub que és al centre del cub gran i que no es veu. El podem posar com vulguem.

La probabilitat que el cub gran tingui totes les cares exteriors vermelles és

$$p_1\, p_2\, p_3 = \frac{1}{20^8} \cdot \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{1}{2^6}$$

i que totes siguin del mateix color

$$p = 2\, p_1\, p_2\, p_3 = 2 \cdot \frac{1}{20^8} \cdot \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{1}{2^6} = 0.5 \cdot 10^{-20}.$$