XXXVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

15 de desembre de 2000, de 16 a 20h.

1.–Considerem una circumferència de radi r i una recta l, tangent a la circumferència en un punt P. Des d'un punt R, mòbil sobre la circumferència, tracem la perpendicular a la recta l i anomenem Q el punt d'intersecció de les dues rectes. Determineu l'àrea màxima que pot assolir el triangle PQR.

2.–Trobeu nombres enters positius n i a_1, a_2,..., a_n tals que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2000$ i el producte $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ sigui el més gran possible.

3.–Donada una funció $f(x)$, s'anomena *punt fix* de f tota solució (real) de l'equació $f(x) = x$. Calculeu, en funció del paràmetre $r > 0$, els punts fixos de les funcions $f(x)$ i $g(x) = f(f(x))$ si $f(x) = rx(1-x), x \in [0,1]$. Representeu gràficament el conjunt

$$\{(r, x_r) \in (0,\infty) \times [0,1] \mid x_r \text{ és un punt fix de } f \text{o de } g\}.$$

4.–Busqueu el mínim nombre natural $n > 0$ tal que $n/2$ sigui un quadrat, $n/3$ sigui un cub, i $n/7$ sigui una potència setena.

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2000, de 9 a 13h.

5.–Tres atletes, A, B i C, competeixen en una sèrie de proves. Per quedar en primera posició en una prova, l'atleta rep x punts; per quedar en segona, y punts; i per quedar en tercera posició z punts. No hi ha possibilitat d'empat, i els nombres x, y, z són naturals tals que $x > y > z > 0$. En acabar, A ha acumulat 20 punts, B 10 punts i C 9 punts. L'atleta A ha quedat segon en la prova de llançament de pes. Qui ha quedat segon a la prova de carrera curta?

6.–Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea α vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre α?

7.–S'anomenen *nombres triangulars* els nombres naturals n de la forma

$$n = \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k, \text{ amb } k \text{ natural.}$$

a) Demostreu que si n és un nombre triangular, aleshores $9n + 1$ també ho és.

b) Determineu els valors dels nombres naturals a i b per tal que $an + b$ sigui triangular sempre que n sigui triangular.

8.–Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura h i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi r més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de r per al qual serà més gran el mullader.

Nota: El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera) és igual a

$$\pi a^2 \left(r - \frac{a}{3} \right)$$

on r és el radi de l'esfera i a l'altura del casquet ($0 \le a \le 2r$).

XXXVII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

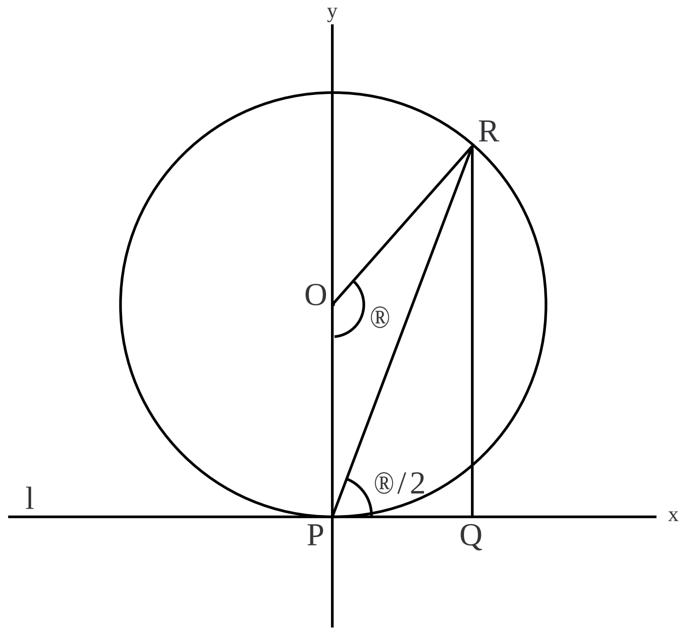
Primera fase (Catalunya)

15 i 16 de desembre de 2000.

Solucions:

1.–

1.1.– *Solució 1:*



Sigui $\alpha = \angle ROP$, l'angle central que correspon a l'arc RP. El valor de α determinarà la posició de R respecte P i l. Segons les condicions del problema $0 \leq \alpha \leq 180°$, variant des de la coincidència de R amb P fins a la posició diametralment oposada a P. De fet, fins al valor $\alpha = 90°$, l'àrea del $\triangle PQR$ va creixent, donat que els dos catets creixen. Podem assegurar, per tant, que el màxim valor de l'àrea serà per a un angle $90° \leq \alpha \leq 180°$.

En el triangle isòsceles $\triangle OPR$ tenim

$$\frac{PR}{2} = r \sin\frac{\alpha}{2}; \quad PR = 2r\sin\frac{\alpha}{2}.$$

En el triangle rectangle $\triangle PQR$, l'angle $\angle RPQ = \alpha/2$ ja que és semi-inscrit a la circumferència i abraça el mateix arc que α.

Llavors, $RQ = PR\sin\frac{\alpha}{2}$; $PQ = PR\cos\frac{\alpha}{2}$. Per tant, si S és l'àrea del $\triangle PQR$, tindrem

$$S = \frac{1}{2}PQ \cdot RQ = \frac{1}{2}PR^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

i substituint PR

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} 4r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} =$$
$$= r^2 \frac{1-\cos\alpha}{2} \sin\alpha = \frac{r^2}{2}\Big(\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\Big)$$

Derivant respecte de α obtenim

$$S'(\alpha) = \frac{r^2}{2}(\cos\alpha - \cos 2\alpha).$$

Imposant $S'(\alpha) = 0$, resulta $\cos\alpha - \cos 2\alpha = 0$ i les solucions a l'interval $[0, 180°]$ són $0°$ i $120°$. La solució $\alpha = 0°$ correspon a l'àrea nul·la obtinguda quan P i R coincideixen. La solució $\alpha = 120°$ correspon al valor màxim buscat. Així

$$S_{\max} = S(120°) = \frac{r^2}{2}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\Big) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{8}.$$

1.2.–*Solució 2:*

Prenem un sistema de referència cartesià amb el punt P com a origen i la recta l com a eix d'abscisses. En aquest sistema d'eixos és $O = (0, r)$ i $R = (x, y)$. L'àrea del triangle $\triangle PQR$ serà $S = \frac{1}{2}xy$. Les coordenades de R estan lligades per l'equació de la circumferència, $x^2 + (y-r)^2 = r^2$. D'aquí obtenim$x^2 + y^2 - 2ry = 0$ i $x = \sqrt{2ry - y^2}$.

Els valors possibles de y pertanyen a l'interval $[0, 2r]$. A més, podem assegurar que el màxim de l'àrea es produirà a l'interval $[r, 2r]$, ja que fins al punt (r, r) totes dues coordenades creixen i també ho farà l'àrea S.

L'expressió de l'àrea del $\triangle PQR$ en funció de y serà

$$S(y) = \frac{y}{2}\sqrt{2ry - y^2} \quad \text{amb} \quad 0 \le y \le 2r.$$

Derivant respecte de y

$$S'(y) = \frac{y(3r - 2y)}{2\sqrt{2ry - y^2}}$$

i imposant $S'(y) = 0$ obtenim $y = 0$ i $y = 3r/2$.

La solució $y = 0$ correspon a la coincidència de R amb P i dóna l'àrea nul·la; la solució $y = 3r/2$ correspondrà al valor màxim de S tal com s'ha comentat abans. Així doncs,

$$y_{\max} = \frac{3r}{2} \quad \text{i } x_{\max} = \sqrt{\frac{3r}{2\Big(2r - \frac{3r}{2}\Big)}} = \frac{r\sqrt{3}}{2.}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2}\frac{r\sqrt{3}}{2}\frac{3r}{2} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2}.$$

2.–El problema consisteix a determinar la partició del nombre 2000 tal que el producte dels seus termes sigui el més gran possible. Donat que el nombre de particions d'un nombre enter en enters positius és finit, el nombre de productes associats també ho serà i, entre ells, n'hi haurà algun o alguns de més grans.

Raonarem transformant una partició de forma que la suma no canvïi i el producte creixi.

1) Si a la partició apareix un nombre 1, l'afegim a qualsevol altre terme diferent de 1. Així aconseguim una partició amb un terme menys, de la mateixa suma i de producte superior. Per tant, *cap dels a_i de la partició desitjada serà 1.*

2) Si un terme qualsevol a_j és $a_j \geq 4$, el substituïm pels nombres 2 i $a_j - 2$. La suma no canvia i el producte canvia substituint el factor a_j per $2(a_j - 2) = 2a_j - 4$ i $2a_j - 4 \geq a_j$ sempre que $a_j \geq 4$. La igualtat valdrà en el cas $a_j = 4$. Per tant, *cap dels a_i de la partició que busquem serà superior a 3.* És a dir, la partició de producte màxim estarà formada per 2 i 3 i el producte associat serà de la forma $2^x \cdot 3^y$.

3) Si $x \geq 3$, cada terna de dosos la podem substituir per un parell de tresos. La suma no canvia, $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, i el producte s'incrementa en un factor $9/8$; $3^2 > 2^3$.

Així el producte associat màxim serà de la forma $2^a \cdot 3^b$ amb $a = 0,\ 1,\ 2$. En el nostre cas $2000 = 3 \cdot 666 + 2$. Llavors el nombre buscat $n = 667$, la partició estarà formada per 666 tresos i un 2 i el producte màxim possible serà $3^{666} \cdot 2$.

Si la suma fos múltiple de 3, per exemple 2001, tindríem $2001 = 3 \cdot 667$, la partició la formarien 667 tresos i el producte màxim seria 3^{667}.

Si la suma fos un múltiple de 3 més 1, per exemple 2002, sera $2002 = 3 \cdot 667 + 1$ i escriuríem $2002 = 3 \cdot 666 + 3 + 1 = 3 \cdot 666 + 2 + 2$, i el producte màxim seria $3^{666} \cdot 2^2$.

3.–Les solucions de $f(x) = rx(1 - x) = x$ que pertanyen a $[0, 1]$ són 0 i $\widehat{x} = 1 - \frac{1}{r}$, i aquesta darrera només si $r > 1$.

Els punts fixos de $g(x) = f(f(x)) = r^2x(1-x)(1-rx(1-x))$ són 0 i les arrels del polinomi

$$1 - \frac{g(x)}{x} = r^3x^3 - 2r^3x^2 + r^2(1 + r)x - r^2 + 1$$

que pertanyin a l'interval $[0, 1]$.

Com que un punt fix de $f(x)$ també ho és de $g(x)$, el polinomi anterior ha de ser divisible per $x - (1 - \frac{1}{r})$ i el quocient és

$$r^3x^2 - r^2(1 + r)x + r(1 + r).$$

Les arrels d'aquest darrer polinomi són

$$x_+ = \frac{\sqrt{1+r}}{2r}\left(\sqrt{1 + r} + \sqrt{r - 3}\right) \text{ i } x_- = \frac{\sqrt{1+r}}{2r}\left(\sqrt{1 + r} - \sqrt{r - 3}\right)$$

que són reals només si $r \geq 3$ i en aquest cas són més grans que 0 i menors que 1. Això últim perquè

$$1 + r + \sqrt{(1 + r)(r - 3)} < 2r \text{ puix que } (1 + r)(r - 3) < (r - 1)^2.$$

En resum, els punts fixos de $f(x)$ a $[0,1]$ són 0 si $0 < r \leq 1$ i $\widehat{x}$ si $r > 1$. Si $r > 3$, $g(x)$ té a més dos punts fixos més, x_+ i x_- que pertanyen a $[0,1]$. Notem que es compleix

$$\widehat{x}(1) = 0, \quad \widehat{x}(3) = \frac{2}{3}, \quad \widehat{x}(r) \text{ és creixent i } \lim_{r\to\infty} \widehat{x}(r) = 1$$

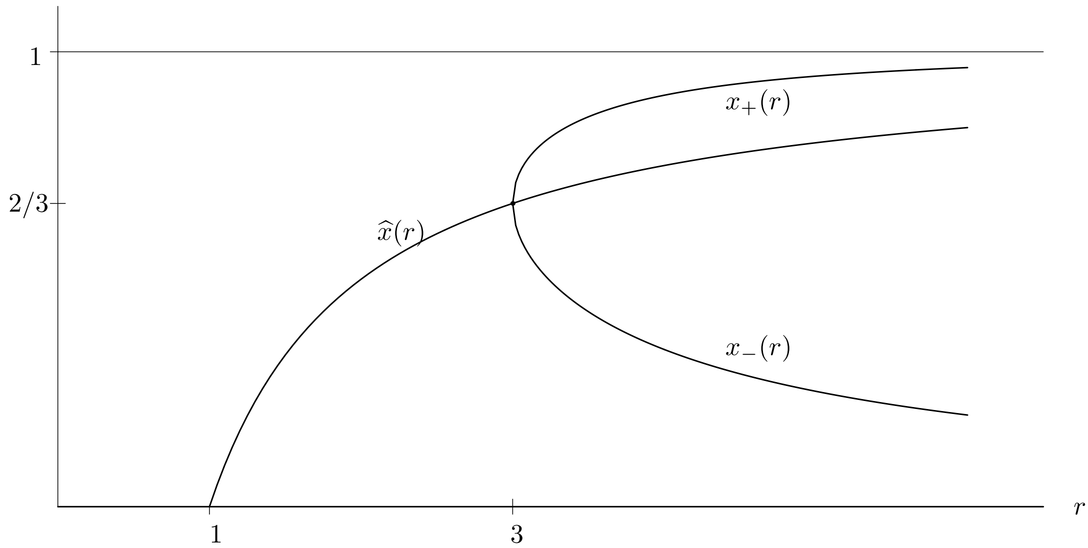
$$x_+(3) = \frac{2}{3}, \quad x'_+(r) = \frac{r+3-\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}}{2r^2\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}} > 0, \quad \lim_{r\to\infty} x_+(r) = 1$$

$$x_-(3) = \frac{2}{3}, \quad x'_-(r) = -\frac{r+3+\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}}{2r^2\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}} < 0, \quad \lim_{r\to\infty} x_-(r) = 0$$

Tenint en compte també que

$$\lim_{r\to 3^+} x'_+(r) = +\infty, \quad \lim_{r\to 3^-} x'_-(r) = -\infty, \quad \text{i} \quad \widehat{x} < x_+$$

aleshores la representació gràfica demanada és



4.–El nombre n ha de ser de la forma $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$.

Si $n/2$ és un quadrat, $\alpha = \dot{2}+1$, $\beta = \dot{2}$, $\gamma = \dot{2}$.

Si $n/3$ és un cub, $\alpha = \dot{3}$, $\beta = \dot{3}+1$, $\gamma = \dot{3}$.

Si $n/7$ és una potència setena, $\alpha = \dot{7}$, $\beta = \dot{7}$, $\gamma = \dot{7}+1$.

D'aquí resulta que

$$\begin{aligned} \alpha &= \dot{21} \quad \text{i} \quad \alpha = \dot{2}+1 \\ \beta &= \dot{14} \quad \text{i} \quad \beta = \dot{3}+1 \\ \gamma &= \dot{6} \quad \text{i} \quad \gamma = \dot{7}+1 \end{aligned}$$

i la solució més petita és $\alpha = 21$, $\beta = 28$, $\gamma = 36$. D'on resulta que

$$n = 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}$$

5.–En total s'atorguen $20+10+9=39$ punts. Donat que $x>y>z$ i que són naturals, com a mínim s'atorguen $1+2+3=6$ punts a cada prova.

Així, $x+y+z\geq 6$ i $x+y+z$ divideix 39. Com que ens diuen que s'han fet un mínim de 2 proves, $x+y+z\neq 39$. Per tant, $x+y+z$ només pot ser 1, 2, 13 i com que és més gran o igual que 6 ha de ser $x+y+z=13$, la qual cosa implica que s'han fet 3 proves.

Donat que A és segon en el llançament de pes, una part de la seva puntuació és y. Si també hagués obtingut un tercer lloc, el màxim que podria haver obtingut seria $x+y+z=13\neq 20$, que és la seva puntuació real. Per tant, la puntuació de A ha de ser $3y$ o $x+2y$ o $2x+y$. Com que 3 no divideix 20, no pot ser $3y$.

Si fos $x+2y$, llavors $x+2y=x+y+y=20$ però $x+y+z=13$ i tindríem $y-z=7$. Com que $x>y>z$, seria $y\geq 8$, $x\geq 9$ i $x+y\geq 17$ en contradicció amb $x+y+z=13$. Per tant, ha de ser $P(A)=2x+y=20$.

Així y ha de ser un nombre parell i com que $x+y+z=13$, y no pot ser més gran o igual que 6, ja que si fos $y\geq 6$ llavors $x\geq 7$ i $x+y\geq 13$. Per tant, $y=2$ o $y=4$.

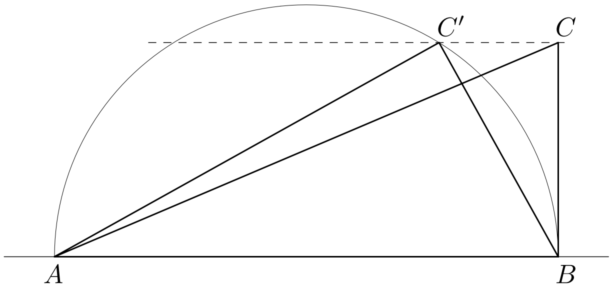
Si $y=2$, z ha de ser 1 i $x=10$ però en aquest cas $P(A)=2x+y=2\cdot 10+2=22\neq 20$. Per tant, $y=4$ i $x=8$. Així queda $z=1$.

Tenim llavors la situació següent

	Prova 1	**Carrera**	**Pes**	**Puntuació**
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9
	13	13	13	

A ha de guanyar les altres dues proves, B no pot ser (tercer, segon, primer); la seva única possibilitat és (tercer, tercer, primer) i C ha de fer dos segons llocs i un tercer. Així C és qui queda en segon lloc en la prova esmentada.

6.–En aquestes condicions hi ha d'haver un triangle amb un catet igual al costat del triangle equilàter i un triangle amb la hipotenusa igual al costat del triangle equilàter.



Si el triangle equilàter té costat ℓ i $AB=\ell$, aleshores $BC=\alpha\sqrt{3}\ell/2$ i perquè existeixi

C' ha de ser
$$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\ell \le \frac{\ell}{2} \quad \text{o sigui} \quad \alpha \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

És clar que els triangles ABC i ABC' no són semblants.

7.–

a) Si $n = k(k+1)/2$ tindrem $9k(k+1)/2 + 1 = (9k^2 + 9k + 2)/2$. Descomponent el polinomi obtenim

$$9n + 1 = \frac{1}{2}\Big(9\Big(k + \frac{1}{3}\Big)\Big(k + \frac{2}{3}\Big)\Big) = \frac{1}{2}(3k+1)(3k+2)$$

i el nombre $9n + 1$ també és triangular.

b) Suposant n triangular anem a veure quines condicions han de complir a i b per tal que $an+b$ ho sigui. És a dir, suposant que $n = k(k+1)/2$ imposem que $an+b = r(r+1)/2$ i determinarem les condicions que han de complir a, b i r per fer possible la igualtat. Tindrem

$$a\frac{k(k+1)}{2} + b = \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{o bé} \quad ak(k+1) + 2b = r^2 + r.$$

Obtenim l'equació de segon grau en r, $r^2 + r - (ak(k+1) + 2b) = 0$ $(*)$ que haurà de tenir solucions enteres per a cada valor de k. Això només succeirà quan el discriminant de l'equació sigui un quadrat perfecte. Ara bé, el discriminant $\Delta = 1 + 4ak(k+1) + 8b$ és un polinomi de segon grau en k i si és un quadrat perfecte haurà de ser el d'un cert polinomi de primer grau en k. Posem $1 + 4ak(k+1) + 8b = (sk+t)^2$ amb s i t independents de k. Fent operacions i identificant coeficients surt $4a = s^2 = 2st$ i $8b + 1 = t^2$. Per tant, $s = 2t$ i obtenim en funció de t

$$a = t^2, \quad b = \frac{t^2 - 1}{8}.$$

Per tal que a i b siguin enters, $(t^2 - 1)/8$ ha de ser enter. Això és possible sempre que t sigui un nombre senar, ja que si $t = 2m - 1$, tenim

$$t^2 - 1 = (2m-1)^2 - 1 = 4m^2 - 4m = 4m(m-1)$$

i com que un dels dos nombres m o $m - 1$ és parell, serà $t^2 - 1 = \dot{8}$ per a tot t senar.

Per tant, si t és senar, $a = t^2$ i $b = (t^2 - 1)/8$ són els nombres que faran $an + b$ triangular. Per tal de comprovar-ho, trobem l'expressió de $an + b$ resolent l'equació $(*)$ amb els valors de a i b que acabem de calcular. S'obté

$$r = \frac{-1 \pm (2tk + t)}{2}$$

i l'única solució entera i positiva serà $r = tk + \frac{(t-1)}{2}$. Així,

$$an + b = \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}\Big(tk + \frac{t-1}{2}\Big)\Big(tk + \frac{t+1}{2}\Big).$$

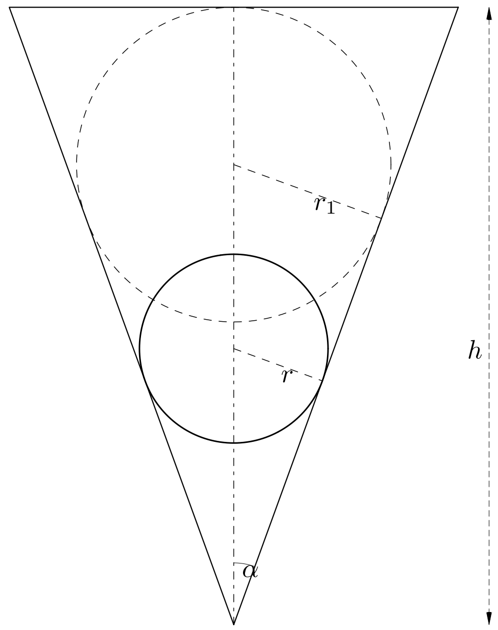


Fig.1.

8.–Indicarem per $V(r)$ el volum d'aigua que es vessa en funció del radi r de l'esfera. Cal analitzar els diversos tipus de posicions que pot tenir l'esfera, en funció del radi r, quan està en contacte amb el recipient cònic.

Si el radi de l'esfera és prou petit (figura 1), aquesta quedarà totalment submergida en el recipient. Podem augmentar el radi mantenint aquesta situació, fins que l'esfera sigui tangent a la superfície de l'aigua. El radi corresponent s'anomenarà r_1.

$$\sin\alpha = \frac{r_1}{h - r_1} \quad \Longrightarrow \quad r_1 = h\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

En aquest cas l'aigua vessada és el volum de l'esfera.

$$V(r) = V_1(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad 0 \le r \le r_1.$$

Observem que es tracta d'una cúbica en r.

Si el radi és més gran que r_1, aleshores té una part que queda fora de l'aigua. Cal encara distingir dues situacions diferents: en la primera, l'esfera és tangent al recipient (figura 2), i en la segona, el radi ja és prou gran perquè l'esfera toqui la vora superior del dipòsit, però no tangencialment (figura 3). El radi r_2 frontera entre les dues situacions esmentades correspondrà a una esfera tangent al dipòsit, amb tangència justament a la vora superior.

$$r_2 = g\tan\alpha = \frac{h}{\cos\alpha}\tan\alpha = h\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Si el radi r de l'esfera està comprès entre r_1 i r_2, el volum de l'aigua vessada és el volum del casquet esfèric submergit. L'altura del casquet submergit és

$$a = a(r) = h - b = h - \left(\frac{r}{\sin\alpha} - r\right).$$

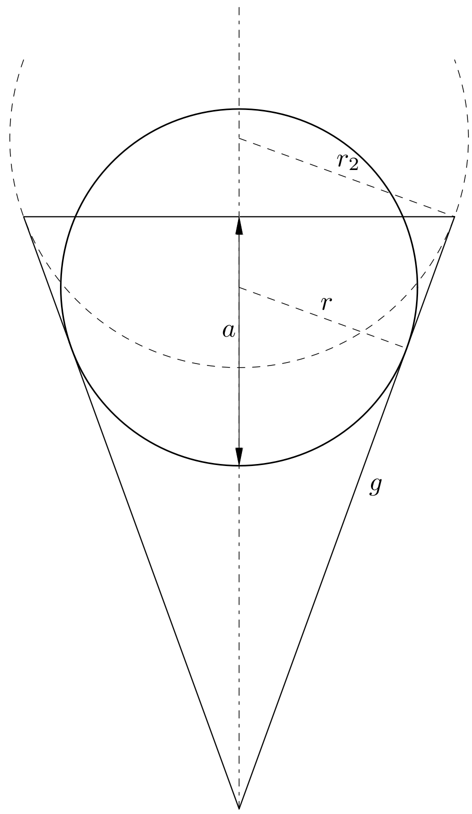


Fig.2.

Així doncs, el volum d'aigua vessada serà

$$V(r) = V_2(r) = \pi(a(r))^2\Big(r - \frac{a(r)}{3}\Big)$$

si $r_1 < r \leq r_2$.

El volum vessat finalment resulta

$$V_2(r) = \frac{\pi}{3}\Big(h - \frac{r(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha}\Big)^2\Big(\frac{r(1+2\sin\alpha)}{\sin\alpha} - h\Big)$$

En aquest cas també es tracta d'una funció cúbica de r.

Com hem dit abans, si $r > r_2$, l'esfera deixa de ser tangent al con i en aquest cas l'altura del casquet submergit és

$$\begin{aligned} a = a(r) = r - \sqrt{r^2 - R^2} &= \\ = r - \sqrt{r^2 - h^2\tan^2\alpha}&. \end{aligned}$$

Per tant, el volum d'aigua vessada és

$$\begin{aligned} V(r) = V_3(r) &= \pi(a(r))^2\Big(r - \frac{a(r)}{3}\Big) = \\ &= \frac{\pi}{3}\Big(r - \sqrt{r^2 - h^2\tan^2\alpha}\Big)^2\Big(2r + \sqrt{r^2 - h^2\tan^2\alpha}\Big) \end{aligned}$$

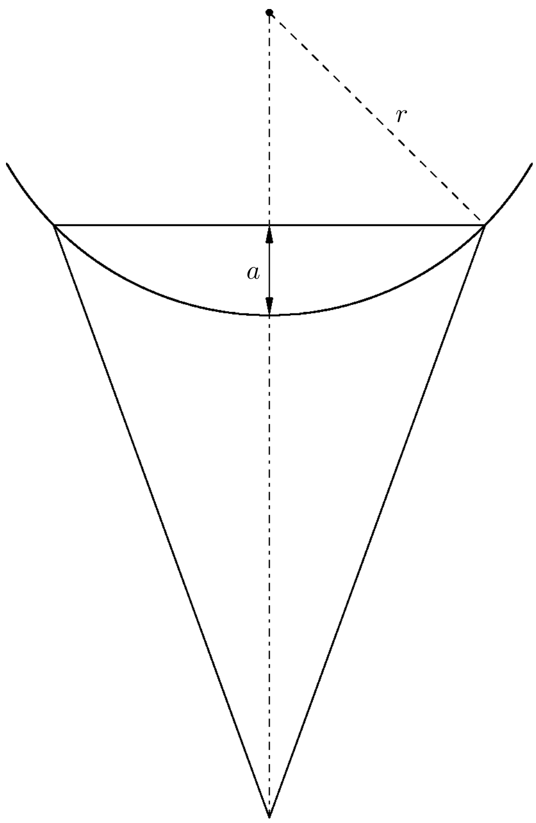


Fig.3.

La funció $V_3(r)$ ja no és una cúbica, com en els casos anteriors. El límit d'aquesta funció quan $r \to \infty$ és 0, cosa que es dedueix apel·lant a la intuïcio física, i també calculant directament a la fórmula. La funció $V(r)$ està definida en tres trams (figura 4), tal com hem dit.

Al primer, de 0 a r_1, $V_1(r)$ és creixent amb r. Al tercer, de r_2 a $+\infty$, $V_3(r)$ és decreixent amb r. Per tant, l'extrem, cas que hi sigui, només cal buscar-lo a l'interval $[r_1, r_2]$ on la funció és $V_2(r)$. Derivant l'expressió $V_2(r) = \pi(a(r))^2\Big(r - \frac{a(r)}{3}\Big)$ resulta

$$V_2'(r) = \pi a(r)\Big[(2r - a(r))a'(r) + a(r)\Big]$$

que s'anul·la si $a(r) = 0$, és a dir, si $r = h\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} > r_2$ i queda fora de l'interval $[r_1, r_2]$; o bé si

$$\begin{aligned} 0 &= (2r - a(r))a'(r) + a(r) = 2ra'(r) + (1 - a'(r)) = \\ &= \frac{1}{\sin\alpha}\Big[r\Big(2\sin\alpha - 1 - \frac{1}{\sin\alpha}\Big) + h\Big] \end{aligned}$$

és a dir, si

$$r = r_c = h\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+2\sin\alpha)}.$$

Notem que $r_1 < r_c < r_2$ i que r_c és un punt de màxim perquè és el primer dels dos punts crítics d'una cúbica $V_2(r)$ amb el coeficient del terme de grau tres positiu.

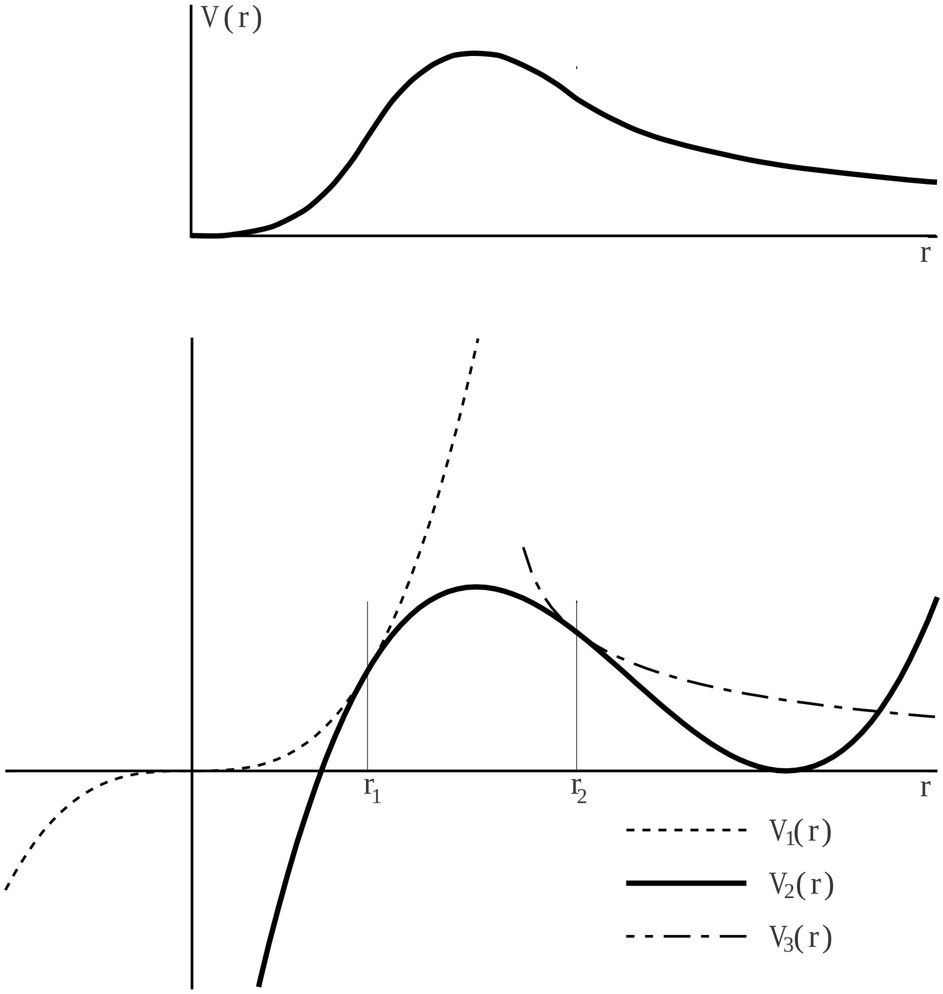


Fig.4.