EL MIRALL

Lema: LLARIM LE

Estic assegut al meu despatx de la universitat, en una còmode butaca davant de l'escriptori, contemplant novament i amb un somriure als llavis l'enunciat del teorema de Goldbach. Encara se'm fa estrany... "teorema"... tant de temps essent una conjectura i finalment després d'uns quants anys d'esforç vaig aconseguir canviar-ho. Va ser, i encara és, una satisfacció immensa, indescriptible. Els premis obtinguts van ser considerables, i el reconeixement per part de l'entorn matemàtic encara més, però al costat de la satisfacció d'haver resolt un problema com aquest eren pràcticament insignificants.

Tan grans esforços havien valgut la pena. Però no ho hauria pogut aconseguir sense l'ajuda, a vegades aparentment irrellevant, de la gent del meu entorn: familiars, amics, companys de la universitat, altres professors,... Els amics, amb el seu suport moral en els moments difícils, quan veus que no te'n surts, i amb les seves felicitacions en els moments d'èxit. Companys i professors de la universitat, proporcionant-te idees i eines que et permeten avançar en la resolució dels problemes. I els més importants, l'ajuda dels quals és menys evident, són els que t'han educat des de petit, els que t'aporten els primers coneixements: els pares. Quan un nen és petit és molt fàcilment influenciable, i sobretot pels pares, les persones més properes a ell. El fet que aquesta influència sigui positiva o negativa depèn d'ells. L'interès que vaig començar a tenir de petit per les matemàtiques el dec a ells. Però moltes vegades no és suficient tenir interès en una cosa i necessites mitjans per arribar-hi. Per això considero que va ser molt important per mi ser alumne de l'Elisenda, una de les professores de matemàtiques que vaig tenir a secundària. Ella em va proporcionar les eines per iniciar-me en el món de les matemàtiques. Recordo especialment una de les classes extraordinàries que vam fer, de la qual vaig extreure la idea principal per a la meva demostració.

Era una tarda d'un dia laborable qualsevol, potser un dimecres. La majoria d'alumnes de l'institut formaven un torrent d'estudiants que anaven cap a la sortida de l'edifici, per anar cap a casa. Però jo no. Cada dia que tenia una d'aquestes classes anava cap al departament de matemàtiques, m'aturava davant de la porta i esperava la professora Elisenda, que venia del pis superior, on acabava de fer una classe de matemàtiques de batxillerat. Quan ella arribava, obria la porta, em feia entrar i seure en una cadira davant de la taula i quan acabava d'endreçar les seves coses s'asseia en una altra cadira al meu costat. La majoria de classes especials començaven així, i llavors l'Elisenda començava a explicar-me diverses coses sobre un tema, preguntant-me si en sabia alguna cosa, si ho entenia, si sabia de què anava,... Però en aquella em vaig avançar, i vaig començar la conversa fent-li una pregunta:

- Elisenda, què és una conjectura?
- Una conjectura? És un enunciat que creus que és veritat però no ho saps del cert perquè no ho ha demostrat ningú.
- Ah. I quan ho demostra algú ja no és una conjectura?
- No, llavors es converteix en teorema. Per quin motiu ho preguntes això?
- Perquè vaig sentir que hi havia un problema molt important que encara no s'havia resolt que es diu "Conjectura de Goldbach". Goldbach era un matemàtic, oi?
- Sí, i és el que va plantejar aquest problema, però com que no va demostrar-lo, no se'n pot dir teorema de Goldbach. Potser algun dia algú demostra aquesta conjectura i llavors es podrà anomenar d'aquesta manera. Potser ho faràs tu, qui sap. Et faries molt famós.

En aquell moment vaig començar a pensar en aquella possibilitat, em vaig començar a interessar de veritat per aquest gran problema. Vaig continuar preguntant:

- Tu saps què diu aquesta conjectura? Vaig sentir que parlava de nombres primers i nombres parells, però no ho vaig entendre del tot.
- L'enunciat diu que tots els nombres parells més grans que dos es poden expressar com a suma de dos nombres primers. Saps què són els nombres primers, oi?
- Són el dos, el tres, el cinc, el set, l'onze,...
- Sí, són aquests. Són els que tenen dos i només dos divisors: ells mateixos i l'u.

Vam començar a parlar de nombres primers i d'algunes de les seves propietats. L'Elisenda mai em deixava sense saber el perquè d'una cosa, a no ser que ella mateixa no el sabés. Si em deia alguna propietat sempre em demanava per què es complia. Si no ho sabia em donava pistes, fins que aconseguia esbrinar-ho, o en algun cas acabava dient “bé, potser és una mica massa difícil...” i m’ho explicava ella. Així que em va continuar fent preguntes per veure què sabia dels nombres primers:

- Saps per què són tots senars excepte el dos?
- Mmm...
- Pensa què passaria si fossin parells.
- Que serien múltiples de dos. Ah, clar! Llavors el dos seria un altre divisor d’aquests nombres i ja no serien primers. I en el cas del dos, seria múltiple d’ell mateix, i només tindria dos divisors: l’u i el dos.
- Molt bé! – va dir somrient – i saps per què tots els nombres primers excepte el dos i el tres són múltiples de sis més u o bé múltiples de sis més cinc?
- Mmm... no ho sé.
- Fes com abans, pensa què passaria si fos el contrari. Si arribes a una conclusió contradictòria o falsa, és que el contrari del que vols demostrar és fals, i per tant, demostres que el primer enunciat és cert. Això s’anomena mètode per reducció a l’absurd, i s’utilitza molt sovint per demostrar alguns enunciats. Així doncs, què passaria si fossin múltiples de sis o múltiples de sis més dos, o més tres, o més quatre?
- Si són múltiples de sis ja no poden ser primers perquè sis no és primer i ja tindran més de dos divisors. Si són múltiples de sis més dos seran parells, i per tant no poden ser primers, només el dos. Amb els múltiples de sis més quatre passa el mateix. I amb els múltiples de sis més tres, com que són múltiples de tres només podrà ser primer el tres. Així sembla molt més fàcil! –vaig dir somrient.
- Sí, depèn de com et mires les coses poden semblar més fàcils o més difícils, i sempre hi ha més d’una manera d’afrontar un problema i també de resoldre’l.

Vaig tornar a pensar en la conjectura de Goldbach. El seu enunciat no era difícil d’entendre, però sí molt difícil de demostrar, de saber per què es complia, suposant que es complia. Amb aquest enunciat no sabies per on començar. Potser es podia transformar en un altre que fos més fàcil de demostrar, o potser el seu contrari era clarament fals o contradictori. Em vaig preguntar: “Quin és el contrari d’aquest enunciat?”, i vaig pensar: el contrari és “no tots els nombres parells més grans que dos es poden expressar com a suma de dos nombres primers" és a dir, que algun nombre parell més gran que dos no es pot expressar com a suma de dos nombres primers. Però aquest encara era un enunciat més complicat que l'enunciat inicial, ja que per demostrar que era fals, calia demostrar que tots es poden expressar d'aquesta manera, demostrant la conjectura inicial. Així doncs, amb aquest mètode arribàvem a un cicle viciós, sense sortida. Per la qual cosa vaig deixar de banda aquest mètode i em vaig proposar de trobar un enunciat equivalent a la Conjectura de Goldbach, que potser seria menys difícil de demostrar. Vaig preguntar a la professora Elisenda si en sabia algun. Ella em va respondre que no, però que entre els dos segurament en podríem trobar algun. Va agafar un paper i un bolígraf i va començar a escriure una igualtat corresponent a l'enunciat:

$$2n = p + q\ , \qquad on\ p\ i\ q\ s\acute{o}n\ nombres\ primers$$

- A partir d'aquí, què podem fer?
- Mmm... podríem passar el dos dividint, i ens quedarà la n aïllada.

$$n = \frac{p+q}{2}$$

Llavors vaig preguntar: "serveix d'alguna cosa saber que n és la mitjana aritmètica de dos nombres primers?".

- No ho sé, potser sí. Potser amb àlgebra no aconseguirem res, també podem mirar-ho d'alguna altra manera. Si representem aquests nombres a la recta real, què passa si un nombre és la mitjana aritmètica de dos altres nombres?
- Que està situat entre els dos, i que està a la mateixa distància dels dos nombres. És com si fos un mirall.
- Dons sí, veus, ja tenim una altra manera de mirar-nos-ho. Per demostrar la Conjectura de Goldbach podem demostrar que tots els nombres naturals més grans que l'u són com un mirall de nombres primers. No sé si és més fàcil de demostrar o no, però és una manera curiosa de veure-ho. No t'ho sembla?
- Sí, és curiós, però potser no és útil.
- Potser no.

Però va resultar ser-ho. En aquella classe vaig aprendre moltes coses sobre la resolució de problemes. Mirar una mateixa cosa des d'un altre punt de vista, de manera diferent, pot proporcionar una ajuda molt gran per a resoldre un problema. Fer-te preguntes, o que algú altre et pregunti, et permet focalitzar i centrar l'atenció en un aspecte concret del problema, i d'aquesta manera dividir i simplificar el problema i afrontar-lo per parts. També vaig aprendre que una petita idea externa pot ser molt útil, pot ser la base de la solució, et pot permetre superar un petit obstacle que impedia tota la resolució.