Problemes Divendres 14

1. Sigui r una recta que passa pel baricentre del triangle ABC i que talla els costats AB i AC en els punts X i Y respectivament. Proveu que

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA}$$

és un nombre enter i determineu el seu valor.

Solució. Distingirem dos cassos:

(1) Si $r \parallel BC$, pel teorema de Tales, tenim

$$\frac{BX}{XA} = \frac{CY}{YA} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA} = 1.$$

(2) Si r no es paral·lela a BC, siguin D, L, E, F les projeccions dels punts B, A, M, C sobre la recta r. Es té que $ME = \frac{1}{2}(BD + CF)$ ja que ME es la paral·lela pels punts mitjos E i M a les bases del trapezi $BDFC$, i $AL = 2MG$ ja que $\triangle ALG \sim \triangle GME$. De l'anterior s'obté

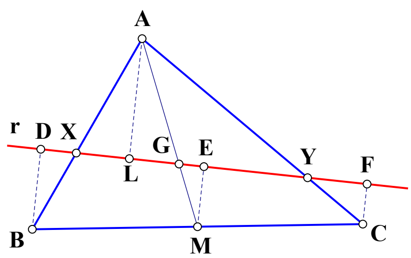

Figura 1: Recta pel baricentre

$AL = BD + CF$. A més, de $\triangle BDX \sim \triangle ALX$ resulta $\dfrac{BX}{XA} = \dfrac{BD}{AL}$, i de $\triangle CFY \sim \triangle ALY$ obtenim $\dfrac{CY}{YA} = \dfrac{CF}{AL}$. Combinant els resultats anteriors, es té

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA} = \frac{BD}{AL} + \frac{CF}{AL} = \frac{AL}{AL} = 1.$$

2. Trobeu tots els números enters positius amb xifra inicial 6, tals que el número enter que s'obté en esborrar aquest 6 és igual a 1/25 del número inicial.

   Demostreu que no existeix cap número enter que comenci en 6 i tal que en esborrar aquest 6 s'obtingui un número igual a 1/35 del número inicial.

   Solució. Un número que comença en 6 és del tipus

$$6 \cdot 10^n + m, \quad 0 \leq m \leq 10^n - 1.$$

   a) La condició donada en primer lloc és $m = \frac{1}{25}(6 \cdot 10^n + m)$ que dóna lloc a $m = 2^{n-2}5^n$, és a dir, els números de la forma $N = 6 \cdot 10^n + 2^{n-2}5^n$. Són

$$625, 6250, 62500, \ldots.$$

   b) Aquí la condició és

$$m = \frac{1}{35}(6 \cdot 10^n + m)$$

   que dóna lloc a $17m = 3 \cdot 2^{n-1}5^n$, cosa impossible.

3. Els números $1, 2, 3, \ldots, 100$ estan escrits a la pissarra. S'elegeixen a l'atzar dos números a i b de la llista, s'esborren i s'escriu el número $a + b - 1$. Després de repetir aquesta operació 99 vegades, quin és el número que queda a la pissarra?

   Solució. Per a cada conjunt de n números enters amb suma S considerem la diferencia $D(n) = S - n$. Ara observarem el valor de $D(n)$ després de cada operació. Siguin a, b els números seleccionats i denotem per R la suma dels restants números en la llista. Es té que $D(n) = S - n = R + a + b - n$ i després d'una operació $D(n-1) = R + (a + b - 1) - (n - 1) = R + a + b - n = D(n)$. És a dir, $D(n)$ és un invariant. Inicialment,

$$D(100) = (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) - 100 = 4950$$

   Finalment, si α és el número que queda a la pissarra després de 99 operacions, llavors $D(1) = \alpha - 1 = 4950$ d'on resulta $\alpha = D(1) + 1 = D(100) + 1 = 4951$.

Problemes Dissabte 15

4. Proveu que per a tot nombre real α es verifica que

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\,\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 1$$

Solució 1. Es té que

$$1 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^3 = \cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$= \cos^6\alpha + \sin^6\alpha + 3\cos^2\alpha\sin^2\alpha,$$

com es demanava demostrar.

Solució 2. La identitat

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

quan $x + y + z = 0$ es transforma en $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Posant $x = \cos^2\alpha$, $y = \sin^2\alpha$ i $z = -1$ es té que $x + y + z = 0$, i per tant, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ es converteix en

$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha - 1 + 3\,\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 0$$

d'on resulta la identitat proposada.

5. Sigui $ABCD$ un trapezi amb bases $AD = a$ i $BC = b$, respectivament. Sigui P el punt d'intersecció de les diagonals AC i BD, i siguin U i L les àrees dels triangles BCP i ADP. Si F és l'àrea de $ABCD$, proveu que

$$\sqrt{F} = \sqrt{U} + \sqrt{L}$$

Solució 1. Com que $AD \parallel BC$ i les diagonals AC i BD són transversals a elles, llavors els triangles BCP i ADP són semblants i tenim

$$\frac{L}{U} = \frac{a}{b}\cdot\frac{h_l}{h_u} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{U}}$$

ja que per la semblança és $\dfrac{h_l}{h_u} = \dfrac{a}{b}$. Llavors, $\dfrac{a}{\sqrt{L}} = \dfrac{b}{\sqrt{U}}$ d'on resulta

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{L}+\sqrt{U}}{\sqrt{L}-\sqrt{U}}$$

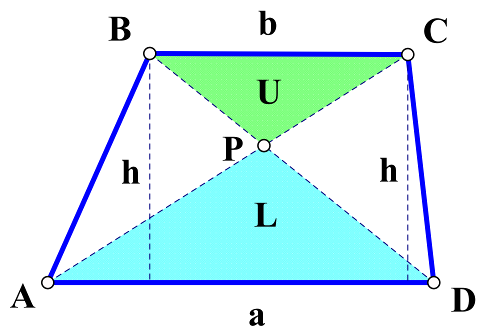

Figura 2: Trapezi

Calculant l'àrea del triangle ABP (o del triangle CDP) de dues maneres, resulta

$$\frac{ah}{2} - L = \frac{bh}{2} - U \Rightarrow \frac{(a-b)h}{2} = L - U,$$

i llavors

$$F = \frac{a+b}{2}h = \frac{a-b}{2} \cdot h \cdot \frac{a+b}{a-b} = (L-U)\,\frac{\sqrt{L}+\sqrt{U}}{\sqrt{L}-\sqrt{U}} = \left(\sqrt{L}+\sqrt{U}\right)^2$$

d'on s'obté la igualtat proposada.

Solució 2. Denotem per x l'altura traçada per P del triangle ADP, i $h-x$ l'altura traçada per P del triangle BCP. La semblança entre els triangles ADP i CBP dóna

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{h-x},$$

i

$$x = \frac{ah}{a+b}, \quad h - x = \frac{bh}{a+b}.$$

Llavors, la igualtat demanada és equivalent a

$$\sqrt{\frac{a^2h}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2h}{a+b}} = \sqrt{(a+b)h}.$$

Aquí el costat esquerra coincideix amb el costat dret. És a dir,

$$(a+b)\sqrt{\frac{h}{a+b}} = \sqrt{h(a+b)},$$

i hem acabat.

6. Proveu que no existeix cap nombre primer que es pugui escriure de dues formes diferents como suma de dos parells diferents de quadrats d'enters positius.

   Solució. Suposem que existeix un nombre primer p tal que

   $$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

   amb a, b, c, d enters positius tals que $\{a, b\} \neq \{c, d\}$. Per a $p = 2$ l'enunciat es compleix trivialment. Suposem que $p > 2$ amb $a \neq b$ i $c \neq d$. Sense perdre generalitat podem suposar que $a > b, c > d$. Si $a > c$ llavors $b < d$, i si $a < c$ llavors es compleix que $b > d$.

   Es té que

   $$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

   i

   $$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

   o

   $$p^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

   Com que

   $$\begin{aligned} (ac + bd)(ad + bc) &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \\ &= cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) \\ &= p(ab + cd), \end{aligned}$$

   llavors $p \mid (ac + bd)$ o $p \mid (ad + bc)$. Si $p \mid (ac + bd)$ existeix un enter $n \geq 1$ tal que $ac + bd = np$. Substituint aquest valor a l'expresió $p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ resulta

   $$p^2(1 - n^2) = (ad - bc)^2$$

   Com que $p^2(1 - n^2) \leq 0$ i $(ad - bc)^2 \geq 0$ llavors $ad = bc$ i $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Això és impossible ja que hem suposat que $a/c > 1$ i $b/d < 1$ o viceversa. Igualment s'arriba a una contradicció si $p \mid (ad + bc)$.

7. Proveu que en tot triangle ABC es cumpleix que

$$\frac{a}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin A$$

Solució. Primer escrivim la desigualtat en la forma

$$\frac{a}{\sin A} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9} (a+b+c)$$

Aplicant el Teorema del Sinus, resulta

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Com que

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \sin \frac{x+y}{2},$$

llavors

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^\circ \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} + 2 \sin \frac{C+60^\circ}{2}$$

$$\leq 4 \sin \left(\frac{\dfrac{A+B}{2} + \dfrac{C+60^\circ}{2}}{2} \right) = 4 \sin 60^\circ$$

d'on s'obté

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Llavors,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{2(a+b+c)}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} (a+b+c).$$

La igualtat es dóna quan $A = B = C = 60^\circ$. És a dir, quan el triangle ABC és equilàter.

8. Sigui $f(n)$ la suma dels n primers termes de la succesió

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

a) Doneu la fórmula de $f(n)$.

b) Demostreu que $f(s+t) - f(s-t) = st$, si s, t són enters positius amb $s > t$.

Solució. a) Si n és parell

$$f(n) = 0 + 1 + \cdots + (n/2 - 1) \ + 1 + 2 + \cdots + n/2.$$

Calculant, obtenim $f(n) = \frac{n^2}{4}$.

Si n és imparell

$$f(n) = 0 + 1 + \cdots + (n-1)/2 \ + 1 + 2 + \cdots + (n-1)/2$$

i trobem $f(n) = \frac{n^2-1}{4}$.

b) Observis que $s+t$ i $s-t$ difereixen en $2t$, de manera que ambdós són de la mateixa paritat. En el cas parell tenim

$$f(s+t) - f(s-t) = \frac{(s+t)^2}{4} - \frac{(s-t)^2}{4} = st.$$

En el cas imparell es procedeix igual.