Mataró de problemes 2014. creamat/FEEMCAT/SCM

Enunciats i propostes de solucions

Problema 0.
Es demana que en l'expressió següent:

$$(B \times O + N) \times (A + N + Y + N + O \times U) = 2014$$

substituïu cada lletra per una xifra del conjunt $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ perquè la igualtat es compleixi. (Com és habitual: lletres iguals, xifres iguals; lletres diferents, xifres diferents) (Així amb les xifres 0, 1, 2, 4 del segon membre apareixeran a l'expressió les deu xifres del nostre sistema de numeració). Al formulari de resposta es demanava el valor de $A + N + Y$.

Solució: 20.

Amb les indicacions de l'enunciat podem veure que el segon factor de l'expressió en estudi és més gran o gual que 42 i més petit o igual que 97 (el mínim s'assoleix per $O \times U = 3 \times 5$, $N = 6$, $\{A, Y\} = \{7, 8\}$ i el màxim per $O \times U = 9 \times 8$, $N = 7$, $\{A, Y\} = \{6, 5\}$).
Aleshores, com que la descomposició en factors de 2014 és $2014 = 2 \times 19 \times 53$ només podrem aconseguir el que demana l'enunciat amb $B \times O + N = 38$ i $A + N + Y + N + O \times U = 53$
Examinem $B \times O + N = 38$. Només pot ser $7 \times 5 + 3$ o bé $6 \times 5 + 8$. Per tant $O = 7, B = 5, N = 3$, o bé $O = 6, B = 5, N = 8$ o bé $O = 5, B = 7, N = 3$ o bé $O = 5, B = 6, N = 8$.
Si ara intentem posar aquests valors, combinant amb les altres xifres que no tenim posades, en $A + N + Y + N + O \times U = 53$ veurem que els primers valors no porten a una solució correcta, els segons tampoc, els tercers sí (amb $U = 6$ i $\{A, Y\} = \{8, 9\}$) i el quart conjunt de valors tampoc no pot ser.
Per tant l'operació demanada és $(7 + 5 \times 3) \times (8 + 3 + 9 + 3 + 5 \times 6) = 2014$ amb l'únic possible canvi (que evidentment es pot fer del 8 i el 9 de la A i la Y) i aleshores $A + N + Y = 9 + 8 + 3 = 20$.

Problemes 1 i 2 pendents.

Problema 3.

S'explica amb un enunciat general:
En un test es comença amb 0 punts, cada resposta encertada dóna 4 punts, una resposta en blanc no afecta la puntuació i cada resposta errònia baixa 1 punt. En Joan ha encertat P de les 10 primeres preguntes del test, i després respon correctament el $B\%$ de la resta, i no nha deixat cap en blanc. Fet i fet ha obtingut justament una determinada fracció F de la puntuació màxima. De quantes preguntes constava el test?

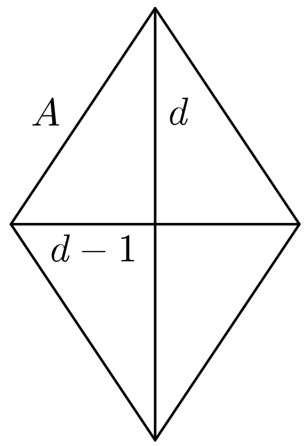
Posem N el nombre de preguntes del test; "la resta" de preguntes després de les 10 primeres és $10 - N$. Si tenim en compte que la puntuació màxima és $4N$ i traduïm l'enunciat a una equació obtenim $4P - (10 - P) + 4\dfrac{B}{100}(N - 10) - \dfrac{100 - B}{100}(N - 10) = F \cdot 4N$ on l'única incògnita és N. Basta, doncs, resoldre aquesta equació.

- Per $P = 9$, $B = 40$ i $F = 1/2$ la solució és $N = 25$.
- Per $P = 2$, $B = 80$ i $F = 1/2$ la solució és $N = 30$.
- Per $P = 5$, $B = 9$ i $F = 3/4$ la solució és $N = 40$.
- Per $P = 8$, $B = 30$ i $F = 1/4$ la solució és $N = 50$.

Problema 4.

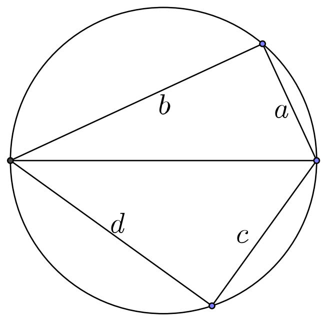
S'explica amb un enunciat general:
Trobeu l'àrea dun rombe que té la longitud de cada un dels seus costats igual a A cm, i que la diferència de longituds entre les seves diagonals és de 2 cm.

- La solució és $A^2 - 1$.



Posarem $2d$ i $2d-2$ les diagonals del rombe. Aleshores l'àrea és la suma de quatre triangles rectangles que tenen catets d i $d-1$ i això és $S = 4 \cdot \dfrac{d(d-1)}{2} = 2d^2 - 2d$. Ara bé si apliquem el teorema de Pitàgores en un d'aquests triangles rectangles, que té hipotenusa A obtenim $A^2 = d^2 + (d-1)^2 = 2d^2 - 2d + 1$ d'on resulta $S = 2d^2 - 2d = a^2 - 1$.

Problema 5. Solució: **18**.



Un quadrilàter com el de l'enunciat tindrà els quatre vèrtexs en una circumferència i els dos vèrtexs que no corresponen als angles rectes seran els extrems d'un diàmetre. Si a és el costat més curt del quadrilàter i b és la longitud de l'altre costat que és al mateix semicercle que a podem indicar els altres dos costats com c, d de manera que es compleixi $a < c < d < b$.Com que el quadrilàter es pot descompondre en dos triangles rectangles, l'àrea serà $A = \dfrac{a \cdot b + c \cdot d}{2}$.
S'ha de complir $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, d'on $c^2 - a^2 = b^2 - d^2$ i, per tant serà

$$(c+a)(c-a) = (b+d)(b-d).$$

A partir del fet que $a < c < d < b$ es dedueix que $c + a < b + d$ i, per tant, a partir de la igualtat anterior haurà de ser $c - a > b - d$ i com que b i d són enters diferents serà $c - a \geq 2$.
Ara començarem per tempteig i com que busquem un quadrilàter d'àrea mínima, començarem provant amb $a = 1$.
Si posem $c = 3$ seria $c^2 - 1 = 8 = (b+d)(b-d)$ però cap de les descomposicions en factors del 8 ens dóna una solució vàlida amb $b, d > c$.
Si posem $c = 4$ seria $c^2 - 1 = 15 = (b+d)(b-d)$ i si examinem les descomposicions del 15 com a producte de dos factors trobem una única solució del problema a partir de $b+d = 15$, $b - d = 1$, a saber $b = 8$, $d = 7$ i en aquest cas l'àrea del quadrilàter és $A = 18$.

Provarem ara que aquesta és l'àrea mínima dels quadrilàters que compleixen l'enunciat.
Si pensem que és $5 \leq c < d < b$ tindríem $d \geq 6$ i $b \geq 7$ i com que sempre és $a \geq 1$, l'àrea A compliria $A \geq \dfrac{1 \cdot 7 + 5 \cdot 6}{2} > 18$.
Així ja hem estudiat tots els casos que faltaven per $a = 1$, tots els de $a = 2$ excepte $c = 4$ i també tots els que corresponen a $a \geq 3$ perquè ja sabem que aleshores $c \geq 5$.
Ara bé, si $a = 2$, $c = 4$ es pot comprovar que no s'obté cap solució al problema. Hauria de ser $c^2 - a^2 = 12 = (b+d)(b-d)$. COm que $b+d$ i $b-d$ han de tenir la mateixa paritat si b i d són enters només podem estudair la desocmposició $b + d = 6$, $b - d = 2$ que ens donaria $b = 4$, $d = 2$. Els costats no són enters diferents.

Problema 6. Solució: **10 km 500 m**.

Estudiem el tercer • de l'enunciat.
Si indiquem com x la distància del càmping al punt on el bus fa la parada de 5 minuts, la Maria, en bici, fa $x - 5$ quilòmetres en 5 minuts. La velocitat de la Maria, en bici, és $12 \cdot (x-5)$ km/h. Com que el bus fa x quilòmetres mentre la Maria, en bici, en fa 5, podem expressar la velocitat del bus així:

$$\frac{x}{5} \cdot 12 \cdot (x-5) = 2{,}4 \cdot x \cdot (x-5)$$

Estudiem ara el segon • que es detallava a l'enunciat.
El temps que triga el bus en recórrer la distància del càmping a la platja més els 5 minuts de la parada, és el mateix que triga la Maria en bici en fer tot el recorregut menys 1 quilòmetre. Si posem y la distància des d'on el bus fa la parada fins a la platja:

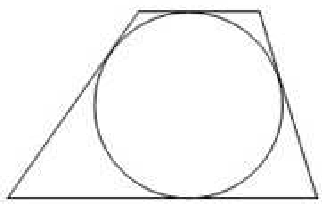
$$\frac{x+y}{2,4x(x-5)} + \frac{5}{60} = \frac{x+y-1}{12(x-5)}$$

Segons el quart • el temps que triga la Maria en anar en bici de la parada del bus fins la platja, més 3 minuts, és el mateix que triga el bus en fer aquest recorregut més 5 minuts.

$$\frac{y}{12(x-5)} + \frac{3}{60} = \frac{y}{2{,}4x(x-5)} + \frac{5}{60}$$

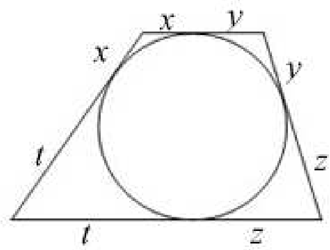
Si resolem el sistema d'equacions que hem plantejat resulta $x = 7{,}5$ i $y = 3$.

Problema 7.
S'explica amb l'enunciat general:
El trapezi de la figura té els quatre costats tangents a una circumferència. La suma de les longituds dels costats paral·lels és A cm i la diferència entre les longituds dels costats no paral·lels és B cm. Quines són les longituds dels costats no paral·lels del trapezi?



- La solució és $\dfrac{A+B}{2}$, $\dfrac{A-B}{2}$.

Si des d'un punt exterior a una circumferència es tracen les dues rectes tangents a la circumferència, els dos segments que uneixen el punt inicial amb els punts de tangència tenen la mateixa longitud. La figura il·lustra aquest fet en el cas del trapezi del problema i permet comprovar que la suma de les longituds dels costats paral·lels és igual a la suma dels costats no paral·lels, $x + y + z + t$ en la figura.

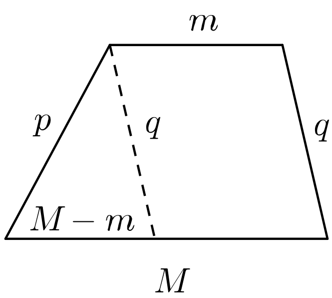


Aleshores, si $p > q$ són les longituds dels costats no paral·lels, segons el que acabem de dir tenim que $p + q = A$ i segons l'altra condició de l'enunciat és $p - q = B$. Si resolem el sistema d'equacions s'obté $p = \dfrac{A+B}{2}$ i $q = \dfrac{A-B}{2}$. Convé fer notar que, amb els valors de A i de B que es generaven aleatòriament en funció de la contrasenya (en tots els casos nombres enters de la mateixa paritat) p i q resultaven ser dos nombres enters.

Tanmateix queda un dubte que ja es posava de manifest en una de les opcions de resposta de les preguntes suplementàries. Es pot construir amb seguretat aquest trapezi?

Tot seguit analitzem la condició necessària i suficient que han de complir quatre nombres $M > m$ i $p > q$ per tal que puguin ser les longituds dels costats d'un trapezi (respectivament les bases i els costats oblics). Aleshores veurem que un trapezi en què la suma de les bases és A i les longituds dels costats no paral·lels són les que hem trobat sí que es pot construir i completarem la solució.

Si es pot construir un trapezi amb les longituds indicades i per un dels vèrtexs de la base menor del trapezi fem una paral·lela a l'altre costat oblic queda dibuixat un triangle de costats p, q i $M-m$. Per tant ha de ser $M-m < p+q$ i $M-m > p-q$.
Recíprocament, si $M > m$ i $p > q$ compleixen aquestes condicions que acabem d'indicar, construïm el triangle de costats p, q i $M-m$ i el completem amb un paral·lelogram de costats m i q i ja tindrem construït el trapezi que interessa.



- Hi ha infinits trapezis que compleixen l'enunciat.
- D'aquests, un total de $\dfrac{A-B}{2} - 1$ tenen els costats enters.

En el trapezi de l'enunciat, si indiquem com m la base menor, serà $M = A - m$ i sabem que $p = \dfrac{A+B}{2}$ i $q = \dfrac{A-B}{2}$. Les condicions necessàries i suficients que hem trobat ens diran en aquest cas que ha de ser $A - 2m < A$ (cosa que es compleix sempre) i $A - 2m > B$ o, equivalentment $m < \dfrac{A-B}{2}$.

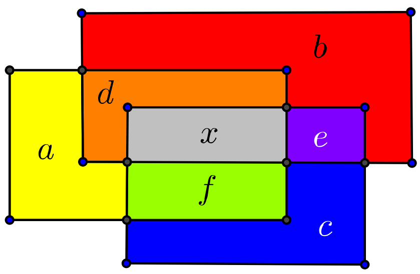
És a dir que per qualsevol valor de m que sigui $0 < m < \dfrac{A-B}{2}$ es podrà construir el trapezi de l'enunciat. Hi ha infinits valors de m que compleixen aquesta condició, dels quals són enters els del conjunt $\{1, 2, ..., \dfrac{A-B}{2} - 1\}$. Per aquests valors també és enter $M = A - m$ i ja sabem que ho són també p i q i, doncs, el nombre de trapezis que es demanava com a segona qüestió suplementària és $\dfrac{A-B}{2} - 1$.

Problema 8.

Com els anteriors es resol amb un enunciat general:
Hem retallat tres fulls de paper que les àrees de tots tres sumen 2014 cm^2 i els hem tirat arbitràriament a terra, de manera que ha quedat coberta una superfície de A cm^2. També sabem que la superfície coberta per la superposició de dos fulls de paper és, en total, de B cm^2. Quina superfície ha quedat coberta per la superposició dels tres fulls de paper?

- La solució és $\dfrac{2014 - A - B}{2}$.

Indiquem com a, b i c les zones cobertes només per un full de paper, com d, e i f les zones cobertes per dos full de paper i com x la zona coberta pels tres fulls de paper. Les tres condicions de l'enunciat ens diuen que

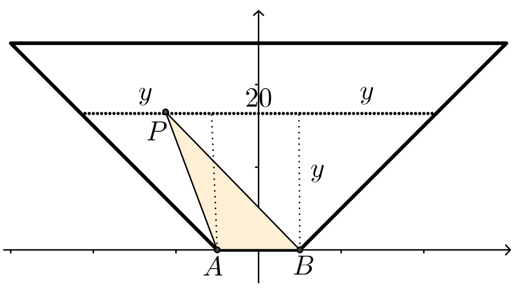


$$(a+d+f+x)+(c+e+f+x)+(b+d+e+x) = 2014$$
$$a+b+c+d+e+f+x = A$$
$$d+e+f = B$$

Podem reordenar la primera equació així: $(a+b+c+d+e+f+g+x)+(d+e+f)+2x = 2014$ és a dir $A+B+2x = 2014$ i, doncs, $x = \dfrac{2014-A-B}{2}$.

Problema 9. Solució: 2581

El triangle ABP de l'enunciat, on $A = (-10, 0)$, $B = (10, 0)$ i $P = (x, y)$ és un punt interior al trapezi té àrea $S = \dfrac{20 \cdot y}{2} = 10y$. Perquè aquesta àrea sigui més gran que 200, ha de ser $y > 20$ i, com que ha de ser interior al trapezi $y < 50$.
Es pot observar que, pel fet que els costats oblics formen angles de 45° amb les bases, el trapezi es pot descompondre en un rectangle i dos triangles rectangles isòsceles.



Aleshores els punts de coordenades enteres, interiors al trapezi, que tenen ordenada y han de complir que la seva abscissa sigui $-10 - y < x < 10 + y$ i com que x ha de ser enter, $-10 - y + 1 \leq x \leq 10 + y - 1$ i això representa $20 + 2y - 1$ punts (tenint en compte de comptar el 0, és clar!).
Com que això ho hem de fer per $y \in \{21, 22, 23, ..., 48, 49\}$ i els nombres de punts correspondents a cada altura són $\{61, 63, 65, ..., 115, 117\}$, que defineixen una progressió aritmètica, n'hi haurà prou amb calcular la suma d'aquesta progressió, que té 29 termes.
El resultat és, doncs, $R = \dfrac{61 + 117}{2} \cdot 29 = 2581$.
