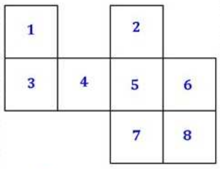
Problemes a l'esprint

Amb el suport de Fundació Privada CELLEX

entitat impulsora de CiMs+CELLEX Beques Batxillerat Internacional www.cims-cellex.cat

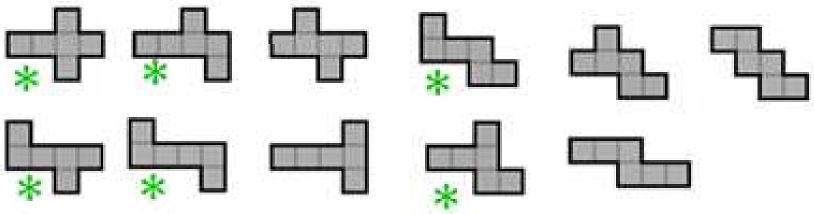
Activitat per a equips de batxillerat
7 de febrer de 2018

A partir d'un esquema com el de la dreta volem escollir sis dels vuit quadrats i esborrar els altres dos de manera que la figura que resulti sigui el desplegament d'un cub.
Quants desplegaments diferents podem obtenir?



Heu de passar la resposta al problema 7. Allà s'en diu número U.

En un concurs telemàtic podia ser interessant començar per una recerca ràpida de tots els possibles desplegaments d'un cub. Ho hem fet i hem marcat els que es poden fer a partir de l'esquema indicat.



Per tal de veure-ho "constructivament" convindria observar, primer de tot, que els quadrats 5, 6, 7 i 8 no podran anar mai alhora en un desplegament i l'1 i el 2, tampoc. Si pensem en els casos amb els quatre quadrats de la tira central (3, 4, 5, i 6) veurem que totes les seleccions amb un dels quadrats de dalt i un dels quadrats de baix ens donen desplegaments correctes. Si pensem en una tira de tres, com que haurà d'anar acompanyada dels dos quadrats de baix , haurà de ser formada pels quadrats 3, 4, 5, 7, 8. I això ens dóna dos desplegaments possibles més (un amb l'1 i un amb el 2) a partir de l'esquema donat.

Considerem la funció $f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}$

Quin és el valor exacte, simplificat al màxim, de $f(2018^{2018})$?

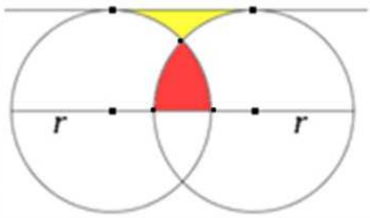
El valor que es demana ja dóna la idea que no es podrà treballar numèricament. Per això convé operar directament en la funció (o alternativament, racionalitzar la fracció que hi apareix):

$$f(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)+1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-(x^2+1)+1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

Per resoldre aquest problema cal conèixer el valor d'un radi, (r) que us han de passar del **problema 5** però ben segur que podeu començar a pensar el problema sense aquest valor numèric

La figura mostra dues circumferències iguals, i secants, de radi r cm.

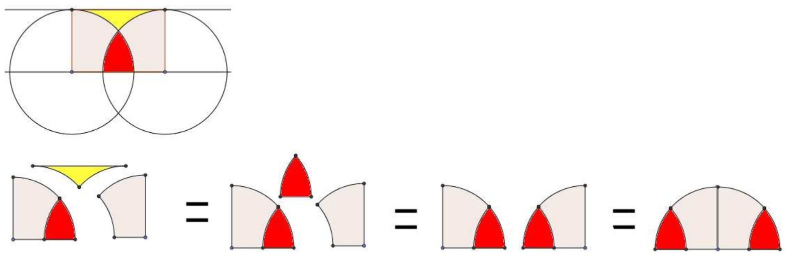
L'àrea de la zona limitada per la línia dels centres i les dues circumferències (només a una banda de la línia dels centres, zona de color roig) i l'àrea compresa entre les dues circumferències i la recta tangent comuna (zona de color groc) són iguals.



Quina és la distància entre els centres de les dues circumferències?

Nota: la resposta es demanarà arrodonida al primer decimal

Tal com se suggeria ("**podeu començar a pensar el problema sense valors numèrics**"), ho farem amb la distància entre centres, d, i el radi r, amb una demostració visual.



Per tant el rectangle de dimensions $d \times r$ té la mateixa àrea que dos quadrants del cercle, és a dir, un semicercle. Tenim doncs $d \cdot r = \frac{\pi r^2}{2}$ i acabem ràpidament el càlcul.

Escollim quatre xifres diferents.
Fent servir només aquestes xifres és possible formar vint-i-quatre nombres de quatre xifres diferents.
Quin és el factor primer més gran de la suma d'aquests vint-i-quatre nombres?

Atenció!: si creieu que el nombre demanat depèn de les xifres tirades heu de contestar 999.

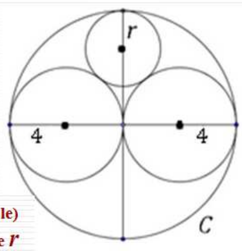
El nombre de dues xifres format per les dues primeres xifres de l'esquerra de la resposta que doneu (xifra de les centenes i xifra de les desenes) passa al problema 9 com a nombre ***S***.

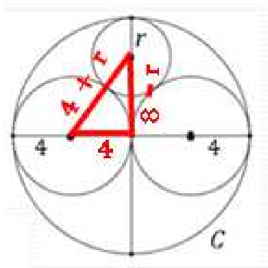
Indiquem com a, b, c, d les quatre xifres. En cadascuna de les columnes de la suma hi ha 6 vegades a, 6 vegades b, 6 vegades c i 6 vegades d. Idò cada columna suma $6 \cdot (a+b+c+d)$. La suma total serà

$$(6000+600+60+6) \cdot (a+b+c+d) = 6666 \cdot (a+b+c+d) = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot (a+b+c+d)$$

i com que el màxim valor que pot tenir $a+b+c+d$ és 30, segur que el factor primer més gran de la suma és el 101.

A la figura tenim dos cercles iguals, i tangents, de radi 4 cm; un cercle C tangent exteriorment als dos anteriors, i, finalment, un altre cercle, de radi r, tangent als tres cercles anteriors.
Quina és la longitud del radi r?





La solució (que és un nombre racional, que caldrà donar com una fracció irreductible) passa al problema 3, on també rep el nom de r

El radi del cercle gros és 8. La línia dels centres de dues circumferències tangents passa pel punt de tangència. Veiem doncs que podem construir un triangle rectangle d'hipotenusa $4+r$ i de catets 4 i $8-r$. Si apliquem el teorema de Pitàgores ens dóna de seguida la solució amb una equació que se simplifica i esdevé de primer grau.

En Pau ha sumat els nombres enters des de l'1 fins al 492.
La Paula ha sumat els nombres enters des del 493 fins al n i diu "Mira, Pau, la meva suma és justament igual que la teva!".
Quin és el valor de n?

La suma dels nombres enters $\{1, 2, \dots, 491, 492\}$ és $P = \frac{1+492}{2} \cdot 492 = 145928$
Si ens fixem en l'enunciat la suma dels nombres $\{1, 2, \dots, 491, 492, 493, 494, \dots, n\}$ ha de ser $2P$.
Per tant ha de ser $\frac{1+n}{2} \cdot n = 2P$ i si resolem l'equació corresponent trobem $n = 696$.

Per resoldre aquest problema cal conèixer un nombre enter U que és la solució del problema 1.

Tirem tres daus (cada dau té les cares numerades de l'1 al 6 i està perfectament equilibrat).
Quina és la probabilitat que amb dos dels números que marquen els tres daus puguem obtenir la suma U? (U=6)

El problema es pot resoldre, naturalment, si escrivim (a mà o amb un petit programa d'ordinador) tots els casos favorables entre els 216 casos possibles quan tirem tres daus, que podem suposar que els tirem un després de l'altre (cosa que no fa perdre generalitat) i observem que hi ha 76 casos favorables.
O bé podem construir amb tot detall un diagrama d'arbre per analitzar l'experiment. Tot seguit, però, en donem una resolució amb idees generals.
Si indiquem com M= el primer i el segon dau sumen 6; N= el primer i el tercer dau sumen 6, i P= el segon i el tercer dau sumen 6, l'enunciat demana de calcular
$p(M \cup N \cup P) = p(M) + p(N) + p(P) - p(M \cap N) - p(N \cap P) - p(M \cap P) + p(M \cap N \cap P)$.
Podem saber que $p(M) = p(N) = p(P) = \frac{5}{36}$.
En cada cas que el primer dau i el segon sumen 6 queda ben determinat el nombre que ha de marcar el tercer dau perquè el primer dau i el tercer també sumin 6. Per això $p(M \cap N) = \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$ i semblantment per a $p(N \cap P)$ i $p(M \cap P)$. Finalment, l'única manera que cada parella de daus sumi 6 és que tots tres daus marquin un 3, cosa que té probabilitat $p(M \cap N \cap P) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. Es dedueix que $p(M \cup N \cup P) = \frac{76}{216} = \frac{19}{54}$.

Calculeu quants nombres reals k hi ha per als quals és possible escriure

$$k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$$

per a alguns nombres reals a, b, c. Quin és el més gran de tots els possibles valors de k?

En el formulari de resposta haureu de donsr el valor de quants i de quin és el més gran.
Per altra banda el valor més gran de k passa al problema 9 com a nombre k.

A partir de $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$ arribem a $a^2 - b^2 = c \cdot (b - a)$ i, doncs, $(a + b) \cdot (a - b) = -c \cdot (a - b)$ i a partir d'aquí tenim les dues possibilitats $a = b$ o bé $a + b + c = 0$.
Semblantment a partir de l'altra igualtat de l'enunciat trobem que $b = c$ o bé $a + b + c = 0$.

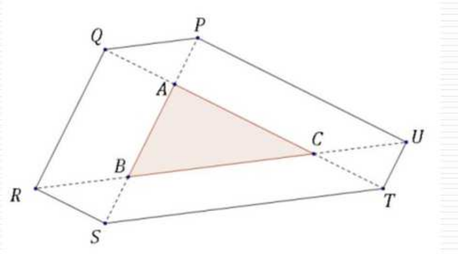
- Si $a + b + c = 0$ aleshores (sempre que prenguem valors que compleixin b+$c \neq 0$, $a + b \neq 0, a + c \neq 0$, perquè altrament no es podria complir l'enunciat) tindrem $k = -1 = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$
- Altrament serà $a = b = c$ i aleshores (sempre que no siguin a, b i c iguals tots tres a 0) tindrem $k = \frac{1}{2} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$

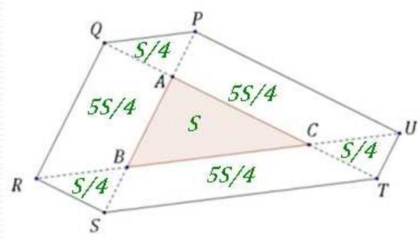
Per tant hi ha dos possibles valors de k i el més gran és $k = \frac{1}{2}$

9

Per trobar la resposta numèrica d'aquest problema cal conèixer el valor de dos nombres que passen respectivament del problema 8 (k, el nombre més gran que compleix l'enunciat i del problema 4, (S) un nombre de dues xifres (format per les xifres de centenes i desenes de la solució)

El triangle ABC de la figura té àrea S (valor que ve del problema 4). Hem allargat els costats del triangle, cap a totes dues bandes, una longitud igual a la de cada costat del triangle multiplicada en cada cas per la mateixa constant k (és a dir $PA = BS = k{\cdot}AB$; $QA = CT = k{\cdot}AC$; $RB = CU = k{\cdot}BC$, per a la constant k que ve del problema 8). Fet així, quina és l'àrea de l'hexàgon $PQRSTU$?





La resposta numèrica passa al problema següent com a nombre H.

Per construcció el triangle APQ és semblant al triangle ABC, amb raó de semblança $k = \frac{1}{2}$. Per tant l'àrea de APQ és $k^2 \cdot S = \frac{S}{4}$. Exactament igual ho podem deduir per als triangles BRS i CTU.

També podem veure que el triangle AST és semblant al triangle ABC, amb raó de semblança $1 + k = \frac{3}{2}$. Per tant l'àrea de AST és $(1+k)^2 \cdot S = \frac{9S}{4}$ i, per tant l'àrea del trapezi $BCST$ és $\frac{9S}{4} - S = \frac{5S}{4}$. Igualment ho podem deduir per als trapezis $AQRB$ i $CUPA$.

Veiem, doncs, que l'àrea de l'hexàgon $PQRSTU$ és $\frac{22 \cdot S}{4} = \frac{11 \cdot S}{2}$.

10

Aquest és el darrer repte del concurs!

Ve un nombre H del problema anterior

Quants nombres de quatre xifres (escrits com és preceptiu, és a dir sense zeros a l'esquerra) compleixen la propietat que el resultat de sumar la xifra de les unitats, la xifra de les desenes i el nombre format per les dues primeres xifres (la dels milers i la de les centenes) és igual al resultat de sumar el nombre format per les dues últimes xifres (desenes i unitats) més el nombre H que ve del problema anterior.

($H = 55$)

Posem $abcd$ el nombre de quatre xifres.

L'enunciat ens diu $d + c + (10a + b) = 10c + d + 55$

Ha de ser, doncs $10a + b = 9c + 55$

Com que $10a + b$ és un nombre de dues xifres els únics valors possibles per a c són $0, 1, 2, 3$, i 4.

Per a $c = 0$, atenent que a i b són xifres, l'única possibilitat és $a = 5, b = 5$, que va acompanyada del fet que d pot tenir qualsevol valor. Tenim 10 nombres que compleixen l'enunciat.

Anàlogament:

$c = 1, a = 6, b = 4, d$ qualsevol valor

$c = 2, a = 7, b = 3, d$ qualsevol valor

$c = 3, a = 8, b = 2, d$ qualsevol valor

$c = 4, a = 9, b = 1, d$ qualsevol valor

En total, doncs, hi ha 50 nombres que compleixen l'enunciat

Problema 1 "de propina"

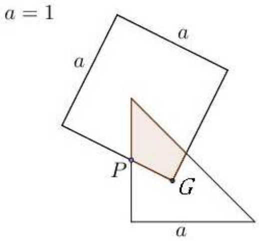
Direm que un nombre natural és *autodescriptiu* si cada xifra apareix en el nombre tantes vegades com indica el seu valor. Per exemple 22, 212, 1333 o 3313 són nombres autodescriptius. Calculeu la suma de tots els nombres de sis xifres autodescriptius.

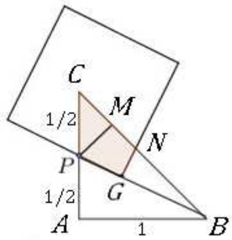
- Amb sis 6. Només el nombre 666666 = 6·111111
- Amb un 1 i cinc 5. Tenim els sis nombres 555551, 555515,... , 155555. Cada columna de la suma dóna 26 i per tant la suma és 26·111111.
- Amb dos 2 i quatre 4. Hi ha $\binom{6}{2} = 15$ nombres. En cada columna de la suma apareixeran el doble de 4 que de 2, seran doncs deu 4 i cinc 2. Cada columna suma doncs 50 i els quinze nombres sumen 50·111111.
- Amb tres 3, dos 2 i un 1. Hi ha $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} = 60 = PR^{\,6}_{3,2,1}$ nombres. En cada columna hi haurà trenta 3, vint 2 i deu 1, que sumen 140. Tots aquests nombres sumaran, doncs, 140·111111.
- No hi ha cap altre tipus de nombres autodescriptius de sis xifres.

La suma total demanada és , doncs, 222·111111 = 24666642.

Problema 2 "de propina"

Hem superposat un quadrat que fa $a = 1$ cm de costat i un triangle rectangle isòsceles que també té la longitud dels catets igual a $a = 1$ cm. Un dels vèrtexs del quadrat està situat en el punt G, que és el baricentre del triangle. Un dels costats del quadrat passa pel punt P, que és el punt mitjà d'un dels catets del triangle. Quina és la mesura, en cm^2, de l'àrea de la zona comuna al triangle i al quadrat?





Es pot donar un raonament de la solució fent ús de la geometria analítica però tot seguit ho fem com a aplicació de la geometria sintètica, fent ús de la semblança. Calcularem l'àrea blanca del triangle ABC en comptes de calcular directament l'àrea demanada.

Si fem PM perpendicular a BC (vegeu la figura per la denominació dels punts), el triangle GBN és semblant al triangle MPB (triangles rectangles amb un angle agut comú).

Com que MCP és un triangle rectangle isòsceles del qual la hipotenusa $CP = \frac{1}{2}$, el catet $PM = \frac{\sqrt{2}}{4}$ i el catet BM té una longitud de $BM = BC - MC = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Com que PG és part de la mitjana BP i sabem que el baricentre compleix $BG = \frac{2}{3} \cdot BP$ serà $BG = \frac{2}{3}BP = \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Com que $\frac{GN}{PM} = \frac{BG}{BM}$ veiem que $GN = \frac{BG \cdot PM}{BM} = \frac{\sqrt{5}}{9}$.

Aleshores l'àrea demanada és àrea $GNCP$ = àrea ABC – àrea ABP – àrea GBN = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{9}}{2} = \frac{17}{108}$.

Problema 3 "de propina"

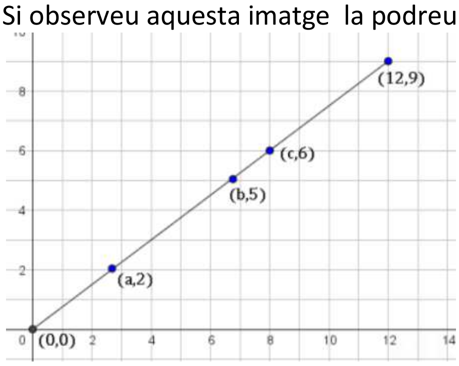
Calculeu el valor mínim que pot tenir l'expressió

$$\sqrt{a^2 + 4} + \sqrt{(a-b)^2 + 9} + \sqrt{(b-c)^2 + 1} + \sqrt{(c-12)^2 + 9}$$

per a valors reals de a, b, c.

El tipus de fórmules que apareix en l'expressió fa pensar en distàncies entre punts.

Si observeu aquesta imatge la podreu relacionar ràpidament amb l'enunciat.



El valor mínim el trobarem quan els cinc punts estiguin realment alineats i serà $\sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.