Problemes a l'esprint 2012. FEEMCAT/SCM/creamat

Convocatòria per a 1r i 2n d'ESO. Proposta de solucions

Problemes de la branca d'olivera

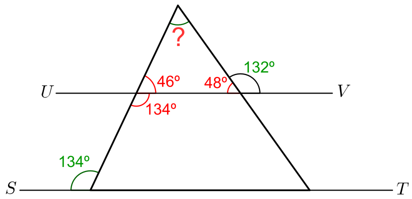
1. 1468.

La lletra a ha de ser un 1 perquè de la columna de les centenes n'hem de portar perquè aparegui el 0 del 2012 i, per tant en portarem 1.
La lletra b no pot ser un 5 perquè de la columna de els desenes n'hem de portar. Per tant la lletra b és un 4 i de la columna de les desenes en portem 2.
Com que de la columna de les unitats també n'hem de portar perquè aparegui el 2, la lletra c no pot ser un 7; ha de ser un 6 i de la columna de les unitats n'hem de portar 3.
És a dir que ha de ser $4d = 32$ i per tant $d = 8$ i el nombre demanat és $abcd = 1468$.

---

2. 86.

Podem determinar dos dels angles del triangle que queda per damunt de la recta UV.



- L'angle que veieu de 48° perquè és suplementari del de 132°.
- Podem veure un angle de 134°, igual que el donat, perquè són alterns externs entre les dues rectes paral·leles UV i ST. Per ser suplementari d'aquest, determinem un angle de 46°.

Com que els angles del triangle indicat sumen 180°, el que busquem serà $180° - 48° - 46° = 86°$

---

3. 44%.

Com que del problema 5 passa $A = 14$, serà $B = 2A + 2 = 30$ i les dimensions del full seran (en cm) 20×30 i la superfície total del paper serà de 600 cm^2.
Les dimensions de la zona de text seran 14×24; l'àrea de la zona de text serà de 336 cm^2 i l'àrea de la zona de marges serà $600 - 336 = 264$ cm^2.
El percentatge demanat és, doncs, $\dfrac{264}{600} \times 100 = 44\%$.

---

4. 119.

Direm N al nombre que busquem. Com que N dividit per 5 dóna 4 de residu, N ha de ser un múltiple de 5 menys 1. Com que N dividit per 6 dóna 5 de residu, N també ha de ser un múltiple de 6 menys 1. COm que el mínim comú múltiple de 5 i de 6 és 30, el nombre de tres xifres més petit que és múltiple alhora de 5 i de 6 és 120. D'aquí es dedueix que el nombre buscat és 119.

Problemes del colom de la pau

5. 14.

Si la suma dels nombres que ha triat l'Albert, diem-li a, és justament el triple de la suma dels nombres que ha triat en Bernat, diem-li b, serà $a = 3b$ i la suma dels vuit nombres triats serà $3b + b = 4b$, és a dir que ha de ser un múltiple de 4.
Com que la suma de tots els nombres de la taula és 110, que és un nombre parell però no múltiple de 4, el nombre que no hem de considerar per a obtenir com a suma dels altres vuit un múltiple de 4 haurà de ser també parell però no múltiple de 4. L'únic nombre de la taula amb aquesta propietat és el 14.

---

6. $\frac{81}{256}$.

Podem fer-ho anant ”marxa enrere” pensant que cada xica deixa les $\frac{3}{4}$ parts de la mantega que hi havia.

Després de menjar les quatre, quedaran les $\frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la tercera.

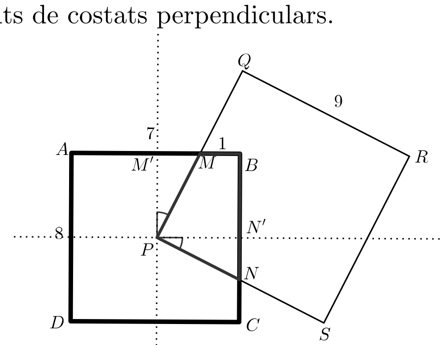
Com que el que queda després d'esmorzar la tercera són les $\frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la segona, al final quedaran $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ del que havia deixat la segona.

Semblantment veiem que quedaran $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ parts del que havia deixat la primera i anàlogament $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$ parts de la quantitat de mantega que hi havia inicialment.

---

7. 18 unitats.

Si des del punt P, centre del quadrat de l'esquerra, tracem perpendiculars als costats del quadrat, es determinen, considerant també els costats de l'altre quadrat, dos triangles iguals, PMM' i PNN'. Son iguals perquè tenen un catet igual (igual a 4 unitats, mig costat del quadrat) i els angles marcats a la figura també són iguals perquè són angles aguts de costats perpendiculars.



Com que de l'enunciat es dedueix que $MB = 1$ i per tant $M'M = 4 - 1 = 3$ unitats, també serà $N'N = 3$, $NC = 1$ i $BN = 7$ unitats.

Si ara ens fixem en el triangle rectangle PMM' veiem que té un catet de 3 i l'altre de 4, i per tant la hipotenusa PM val $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ unitats. Per la igualtat que ja hem comentat també serà $PN = 5$. Podem establir, doncs, que el perímetre de $PMBN = 5 + 1 + 7 + 5 = 18$ unitats.

És interessant comentar que aquest càlcul no depèn per a res de la grandària del quadrat de la dreta de la figura i que tot i que el perímetre del quadrilàter $PMBN$ depèn de la posició dels dos quadrats la seva àrea és sempre la mateixa encara que movem els dos quadrats, mantenint, això sí, un vèrtex del quadrat de la dreta en el centre del quadrat d el'esquerra.

---

8. 15.

Si seguim les instruccions per a la construcció de la llista, veurem que els primers termes són aquests:

$\{33, 11, 5, 45, 15, 5\}$

A partir d'aquí, com que cada nou terme només depèn de l'últim, s'aniran repetint els termes per grups de 3:

$\{33, 11, 5, 45, 15, 5, 45, 15, 5, 45, 15, 5, 45, 15, ...\}$

Per arribar al terme 2012è hem de comptar els dos primers i 2010 termes més; com que 2010 és múltiple de 3 el terme que busquem serà l'últim d'un dels grups de 3, és a dir que valdrà 15.

Reptes finals

9. Les 7 en punt.

Vistos els valors que passen de problemes anteriors, els horaris a tenir en compte són:

Anada: de les 9.15 (hora de A) a les 14.00 (hora de B)

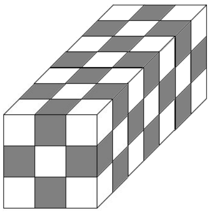
Tornada: de les 8.30 (hora de B) a les 9.15 (hora de A)

Vistos els horaris, si imaginem que l'avió de tornada s0enlairés tot ajust arribar a B, a les 14.00 (hora de B) deduïm que arribaria a A a les 14.45 (hora de A). Per tant la durada real dels dos vols seguits hauria estat de 5 hores 30 minuts i, doncs, cada un duraria 2 hores 45 minuts.

Per tant quan l'avió arriba a B a les 14.00, hora de B, serien els 12.00 hora de A. Ja tenim doncs la diferència horària, que ens permet respondre que quan en l'hora B són les 9.00 hores, al mateix moment en l'hora de A són les 7.00 hores.

10. a) 31/63; b) 8/17.

A partir del valor que passa del problema anterior, les dimensions de l'ortoedre són $3 \times 3 \times 7$.



Per resoldre l'apartat a) hem de tenir en compte que en total hi ha $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$ cubs i que el nombre de cubs grisos, mirant-ho per "llesques" de 3×3 començant per la que té les quatre cantonades blanques és $4 + 5 + 4 + 5 + 4 + 5 + 4 = 31$. Per tant la fracció del nombre de cubs grisos respecte del total de cubs és $\frac{31}{63}$.

Pel que fa a l'apartat b) veiem que la superfície total (prenent com a unitat la cara dels cubs petits) és $2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 7 = 102$ i el nombre de cares exteriors grises dels cubs que formen l'ortoedre (mirant primer les dues cares de 3×3 i després les quatre cares de 3×7) és $2 \cdot 4 + 4 \cdot 10 = 48$. La fracció demanada, de superfície grisa respecte el total de la superfície és $\frac{48}{102} = \frac{8}{17}$.

Problemes fora de concurs

11. 20.

Com que $\frac{164}{4} = 41$ i $\frac{164}{5} = 32,8$ això ens diu que el nombre de capsetes ha d'estar entre aquests dos valors, però com que a més sabem que ha de ser un quadrat perfecte només pot ser 36.

Si pensem que a cadascuna de les 36 capsetes hi hem posat 4 caramels, com que $36 \cdot 4 = 144$, veiem que exactament en 20 capses hi hem d'afegir un caramel. Seran doncs 16 capses de 4 caramels i 20 capses de 5 caramels les que hi hauran a la capsa-regal de l'enunciat.

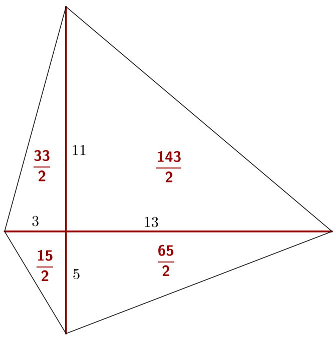
Com a cosa curiosa expliquem una solució que ha comentat un alumne. Agafa la capsa quadrada que es donava com a exemple, que tenia 40 caramels; ajunta quatre capses d'aquestes formant un quadrat i veu que així té 160 caramels amb 16 capsetes de 5 i 20 capsetes de 4. Li falten 4 caramels. Afegeix un caramel a quatre capsetes de 4 (i aleshores seran 20 de 5 i 16 de 4) i ja té el problema resolt.

12. a) 30; b) 128.

Si un triangle té dos costats "mòbils" de longituds a i b, la màxima àrea que pot tenir s'aconsegueix quan aquests dos costats siguin els catets d'un triangle rectangle, i l'àrea és, doncs, $A = \frac{a \cdot b}{2}$. Si el triangle no és rectangle l'àrea seria $A = \frac{a \cdot h}{2}$ on h és l'altura sobre el costat a. Si el costat b no és perpendicular a a, sinó que l'hi és oblic, aleshores és clar que $h < b$.

a) Per la propietat que acabem de comentar la resposta és $A = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$.

b) La màxima àrea del quadrilàter s'obtindrà quan disposem els llistonets formant quatre triangles rectangles. Per altra banda, per obtenir l'àrea màxima, interessa que un d'aquests triangles tingui per costats 11 i 13. De les dues possibilitats que es presenten per situar el 3 i el 5 es pot veure que la que dóna àrea màxima és



i l'àrea total és $A = \frac{13 \cdot 11}{2} + \frac{11 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 13}{2} = 128$.