SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

XXIV Prova Cangur

Cangur 2019

Societat Catalana de Matemàtiques

Kangourou sans Frontières

http://www.aksf.org/countries.fr.xhtml

Pays

Members

Albanie	Allemagne	Arabie saoudite	Argentine
Arménie	Australie	Autriche	Azerbaïdjan
Belgique	Biélorussie	Bolivie	Bosnie-Herzégovine
Brésil	Bulgarie	Canada	Catalogne
Chili	Chypre	Colombie	Corée du Sud
Costa Rica	Croatie	Danemark	Équateur
Espagne	Estonie	États-Unis	Finlande
France	Grèce	Hongrie	Inde
Irak	Iran	Israël	Italie
Kazakhstan	le Kirghizstan	le Kosovo	Lettonie
Lituanie	Macédoine	Malaisie	Mexique
Moldavie	Mongolie	Mozambique	Myanmar
Niger	Norvège	Ouzbékistan	Pakistan
Panama	Paraguay	Pays-Bas	Philippines
Pologne	Porto Rico	Portugal	République dominicaine
République tchèque	Roumanie	Royaume-Uni	Russie
Serbie	Singapour	Slovaquie	Slovénie
Suède	Suisse	Tadjikistan	Tunisie
Turquie	Ukraine	Uruguay	Venezuela
Viêt-Nam			

Applicants

Afghanistan	Chine	Égypte	Hong Kong
Indonésie	Liban	Pérou	Tanzanie
Zambie			

Dedicatòria

El XXIV Cangur de la SCM es va celebrar el dia 21 de març de 2019 en el context de la iniciativa de l'associació internacional *Le Kangourou sans frontières*.

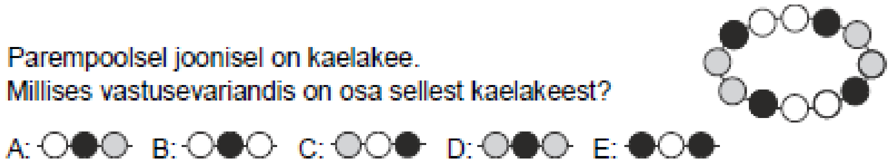
Les noies i els nois que obtenen premi o menció, que representen l'1% dels més de cent vint-i-cinc mil participants reben un llibre amb tots els enunciats i solucions comentades de la prova Cangur 2018, gentilesa de la fundació Cellex.

Amb la publicació d'aquest fulletó, amb continguts del Cangur 2019, la comissió Cangur vol afegir-hi un petit granet de sorra i donar l'enhorabona a totes les persones que el rebran, que és interessant fer constar que pertanyen a 533 centres dels 1.136 que van participar en el Cangur. Creiem que aquesta diversitat geogràfica en els premis és una dada que s'ha de valorar molt positivament.

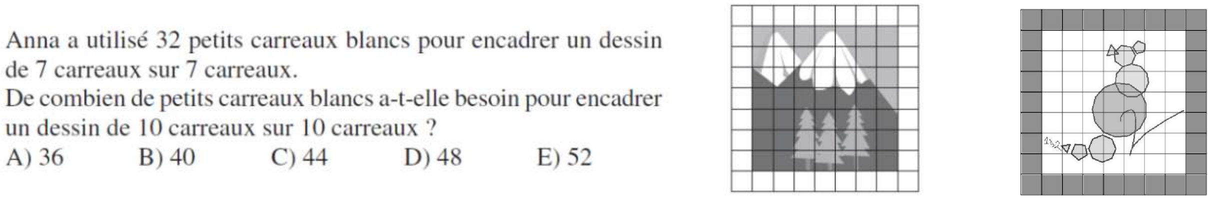
Enunciats de la prova Kangourou sans frontières 2019 en els idiomes d'altres països on es fa el Cangur.

Tot seguit trobareu alguns enunciats tal com es van proposar en nacions diverses: Armènia, Espanya, Estònia, Filipines, Finlàndia i França. Els acompanyem de la presentació que se'n va fer en el Cangur de la SCM.

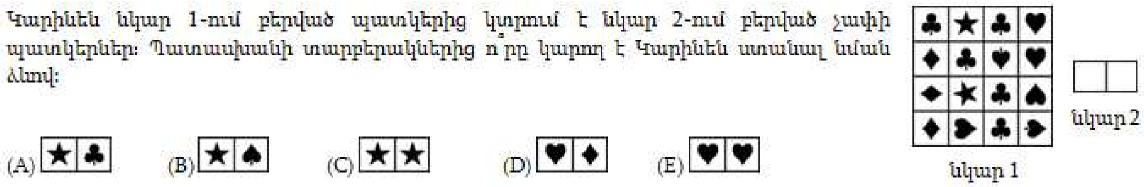
És important fer constar que a les Filipines el Cangur no es fa en la llengua pròpia sinó en anglès. Així ens ho va explicar el cap de l'organització: «We are using english as our second language here, hence our language for most exam here in the Philippines is English. We only use Tagalog language for communication subject.»

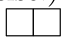


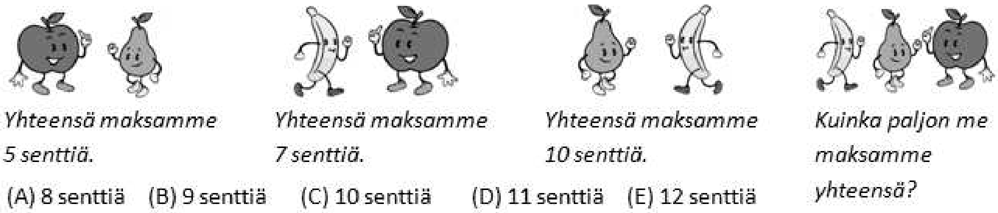
(*Enunciat d'Estònia. A Catalunya, problema 2 de cinquè.)*
Quina de les opcions de resposta mostra una part d'aquest collaret?



(*Enunciat de França. A Catalunya, problema 23 de cinquè i 18 de sisè.)*
La Clara va utilitzar 32 petits quadrats grisos per a emmarcar la imatge de mida 7×7 que teniu a la dreta. Quants quadrats grisos necessita per a emmarcar una imatge de 10×10?



(*Enunciat d'Armènia. A Catalunya, problema 5 de sisè.)*
La Caterina diu que ha tallat una peça com aquesta  (que pot estar girada) del full de la quadrícula amb símbols que mostra la figura. Quina de les peces de les opcions de resposta **no** pot ser la que ha tallat?



(*Enunciat de Finlàndia. A Catalunya, problema 16 de sisè.)*
Els textos de les vinyetes: «Tots dos junts costem 5 monedes»; «Ara nosaltres en costem 7»; «I nosaltres, 10»; «Quant costem, entre tots tres?»

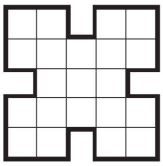
Veega täidetud klaas kaalub 400 grammi. Tühi klaas kaalub 100 grammi. Kui palju kaalub veega poolenisti täidetud klaas?

A: 150 grammi B: 200 grammi
C: 225 grammi D: 250 grammi E: 300 grammi

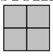
(*Enunciat d'Estònia. A Catalunya, problema 5 de primer i 15 de sisè.)*
Un vas ple d'aigua pesa 400 grams. El mateix vas buit pesa 100 grams. Quant pesa el vas ple d'aigua exactament fins a la meitat?

Laura veut colorier un seul carré composé de quatre petits carreaux sur la figure ci-contre. Combien de possibilités a-t-elle ?

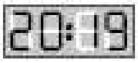
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9



(*Enunciat de França. A Catalunya, problema 7 de primer i de segon.)*

La Laura vol col·locar un quadrat 2×2  que encaixi exactament en quatre caselles de la figura de la dreta. De quantes maneres diferents pot fer-ho?

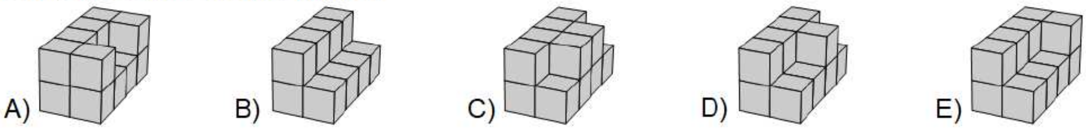
Kell näitab praegu 20:19. Mis kell ilmuvad esimest korda kella tabloole needsamad neli numbrit uuesti?



(*Enunciat d'Estònia. A Catalunya, problema 3 de segon. Amb les mateixes opcions de resposta.)*

Un rellotge digital marca . Quina hora mostrarà la propera vegada que utilitzi els mateixos quatre dígits?

Miguel pinta las siguientes piezas compuestas de cubos idénticos. Sus bases están hechas de 8 cubos. ¿Para qué pieza necesita más pintura?



(*Enunciat d'Espanya. A Catalunya, problema 10 de segon. L'enunciat es donava simplificat.)*
En Miquel pinta les construccions de les figures. En quina necessitarà més pintura?

The pages of the book Juliet is reading are all numbered. The numbers used on the pages contain the digit 0 exactly five times and the digit 8 exactly six times. What is the number of the final page?

(A) 48 (B) 58 (C) 60 (D) 68 (E) 88

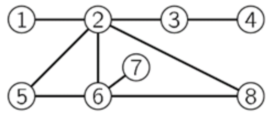
(*Enunciat de Filipines. A Catalunya, problema 8 de tercer.)*
El document que llegeix la Júlia té tots els fulls numerats correlativament 1, 2, 3 .... Per a escriure aquesta numeració s'han fet servir cinc 0 i sis 8. Quin dels nombres següents pot ser el darrer d'aquesta numeració?

Jana está jugando al baloncesto. Después de una serie de 20 lanzamientos ha encestado el 55% de las veces. Cinco lanzamientos más tarde, su porcentaje ha subido al 56%. ¿De los últimos cinco lanzamientos cuántos ha anotado?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(*Enunciat d'Espanya. A Catalunya, problema 15 de tercer i 6 de quart.)*

Հայկը ներկում է նկարում բերված պատկերի ութ շրջաններից յուրաքանչյուրը կարմիր, դեղին կամ կապույտ այնպես, որ ցանկացած երկու շրջան, որոնք միացված են ուղիղ գծով, ունենան տարբեր գույներ: Ո՞ր երկու շրջանները Հայկն անպայման կներկի նույն գույնով:



(A) 5 և 8 (B) 1 և 6 (C) 2 և 7 (D) 4 և 5 (E) 3 և 6

(*Enunciat d'Armènia. A Catalunya, problema 26 de tercer.*)
En Pau va pintar cada un dels vuit cercles del diagrama de color vermell, groc o blau, de manera que no hi ha dos cercles units directament que es pintin del mateix color. Quins dos cercles s'han de pintar forçosament del mateix color?

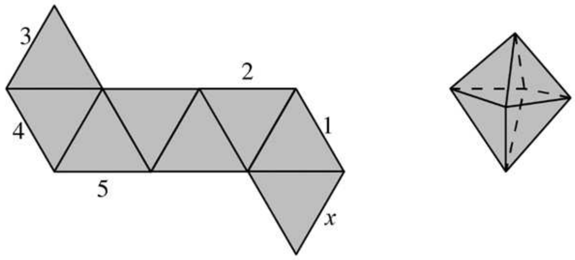
In a race, Lotar finished before Manfred, Victor finished after Jan, Manfred finished before Jan and Eddy finished before Victor. Who finished last of these five runners?

(A) Victor (B) Manfred (C) Lotar (D) Jan (E) Eddy

(*Enunciat de Filipines. A Catalunya, problema 2 de quart i 7 de tercer.*)
En una cursa, en Lluís va acabar abans que la Maria, en Víctor va arribar darrere la Joana, la Maria va arribar abans que la Joana i l'Edu va acabar abans que en Víctor. Qui va acabar en l'última posició de la cursa?

A) En Víctor B) La Maria C) En Lluís D) La Joana E) L'Edu

Kuvassa vasemmalla näkyvä pahvinpala taitellaan kuvassa oikealla näkyväksi oktaedriksi. Mikä sivu päätyy yhteen sivun x kanssa?



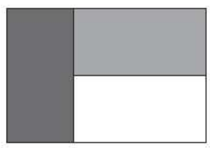
(A) Sivu 1 (B) Sivu 2 (C) Sivu 3 (D) Sivu 4 (E) Sivu 5

(*Enunciat de Finlàndia. A Catalunya, problema 14 de primer de batxillerat.*)
El dibuix mostra un desenvolupament pla d'un octàedre. En construir l'octàedre, quin dels segments retolats amb 1, 2, 3, 4 i 5 coincidirà amb el segment indicat amb la lletra x

---

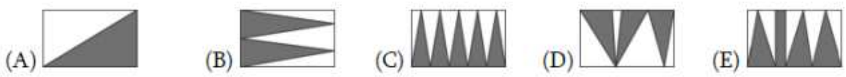
Le drapeau ci-contre a la forme d'un rectangle divisé en trois rectangles identiques.
Quel est le rapport largeur/longueur du rectangle blanc ?

A) 1/2 B) 2/3 C) 2/5 D) 3/7 E) 4/9



(*Enunciat de França. A Catalunya, problema 1 de segon de batxillerat.*)
La bandera de Cangurlàndia és un rectangle dividit en tres rectangles iguals, disposats com es mostra a la figura. Quina és la proporció entre les longituds dels costats del rectangle blanc?

Պատասխանի տարբերակներից որ՞ում է մոխրագույն մասի մակերեսն ամենամեծը, եթե բոլոր հինգ ուղղանկյուններիմակերեսները հավասար են:



(*Enunciat d'Armènia. A Catalunya, problema 3 de segon de batxillerat, amb una variant a 3r i a primer de batxillerat amb quadrats en comptes de rectangles.*)
A l'interior de cadascun de cinc rectangles iguals s'ha pintat una part de color gris. Quin rectangle té pintada una àrea més gran?

Unes propostes de l'UKMT

Presentades en els *Annual Meetings* de

Le Kangourou sans Frontières

United Kingdom Mathematics Trust

L'equip que prepara els *Kangaroo papers* al Regne Unit forma part de la societat *United Kingdom Mathematics Trust*. En cada trobad internacional que prepara la prova Cangur de l'any següent, els membres de la UKMT reparteixen als assistents una separata del seu llibre anual, de la qual hem tret idees per a aquesta publicació. Tot seguit reproduïm, amb autorització dels autors, dos articles didàctics, corresponents a les reunions de San Juan (Puerto Rico, 2013) i Edingurgh (Escòcia, 2014). Podem deduir l'àrea d'un polígon comptant punts? Podem calcular el valor d'una suma amb un nombre infinit de sumands?

El teorema de Pick

La Figura 1 mostra un *polígon de quadrícula*, és a dir un polígon que té tots els seus vèrtexs en les interseccions d'una quadrícula. Si la distància entre les línies de la quadrícula és d'una unitat, quant val l'àrea del polígon?

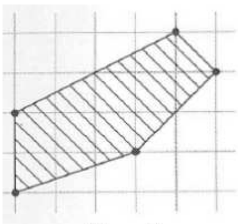


Figura 1

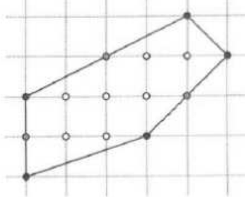


Figura 2

L'any 1899 el matemàtic austríac Georg Pick va demostrar un teorema que ens dóna una manera de trobar l'àrea d'aquests polígons de manera meravellosament simple. Compteu el nombre i de punts de la quadrícula que hi ha dins del polígon (els set cercles buits marcats a la Figura 2) i el nombre b de punts de la quadrícula situats en el contorn del polígon (els vuit cercles plens que veieu a la Figura 2).

Aleshores, l'àrea A del polígon ve donada per la fórmula $A = i + \frac{b}{2} - 1$.

En el nostre exemple, tenim $i = 7$ i $b = 8$, així que $A = 7 + 4 - 1 = 10$. Sabríeu trobar l'àrea d'alguna altra manera Podeu i així comprovaríeu aquest resultat?

Podem raonar visualment per què aquest resultat és correcte si creem una figura de forma més simple que tingui la mateixa àrea que el polígon. Envolteu tots els punts de l'interior i de la frontera amb un quadrat, com es mostra a la Figura 3. Agafeu només mig quadrat dels que provenien d'un punt de la frontera per obtenir la forma de la Figura 4. Fet així podeu veure que les regions més fosques, que no pertanyen a l'àrea que busquem, es poden combinar per formar un quadrat sencer (Figura 5), i per tant, restem una unitat quadrada a l'àrea per a descomptar-les. Finalment, podeu observar que tot i que algunes parts de la figura queden fora del polígon, per cadascuna d'aquestes parts que queden fora hi ha una regió equivalent a l'interior que no forma part de la figura. Així doncs, la nova figura i el polígon tenen la mateixa àrea.

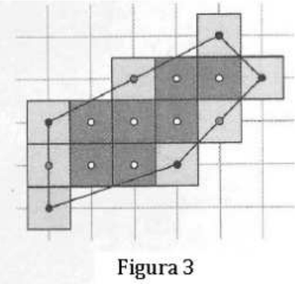


Figura 3

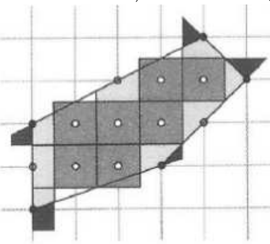


Figura 4

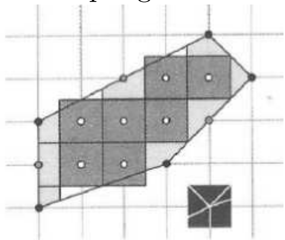
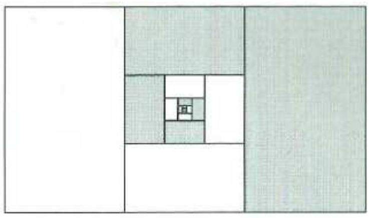


Figura 5

Què succeeix quan algun dels angles interiors del polígon és còncau?

Progressions geomètriques

En la successió infinita $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...$ passem de cada terme al següent dividint per 3 és a dir que la raó entre dos termes consecutius és de 3:1. Una successió com aquesta, en què la raó entre dos termes consecutius és constant, s'anomena *progressió geomètrica*. Podem imaginar una suma infinita, és a dir que sumem tots els termes de la successió? Què succeirà?

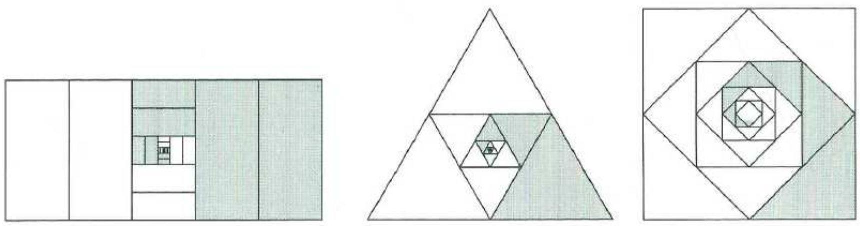


En la figura anterior l'àrea ombrejada està formada per rectangles. L'àrea del rectangle més gran equival a $\frac{1}{3}$ de l'àrea total; el següent rectangle pel que fa a la mida té àrea $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ del total; el següent, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$ i així successivament. Com que, després del primer, cada rectangle té $\frac{1}{3}$ de l'àrea del rectangle anterior, tenim una progressió geomètrica.

Com es pot veure a la figura, l'abast total de l'àrea ombrejada és el mateix que l'abast total de l'àrea sense ombrejar, i per tant l'àrea ombrejada és la meitat del total. Així doncs, la figura demostra que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + ... = \frac{1}{2}$$

Les imatges següents permeten deduir resultats semblants. Sabríeu dir de quines progressions estem fent la suma i quin és el resultat?



Enllacem els articles anteriors amb unes col·laboracions dels membres del *Museu de Matemàtiques de Catalunya* per a aquesta publicació.

La primera és una demostració sense paraules, però amb enginy i papiroflèxia.

Imprimiu en un paper o cartolina bicolor una figura com la que teniu a la dreta, en un quadrat. Heu d'anar amb molta cura de respectar les proporcions i assenyalar adequadament els segments que corresponen a un plec muntanya (línia contínua) i a un plec vall (línia de punts).

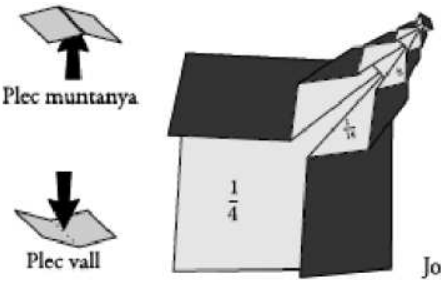
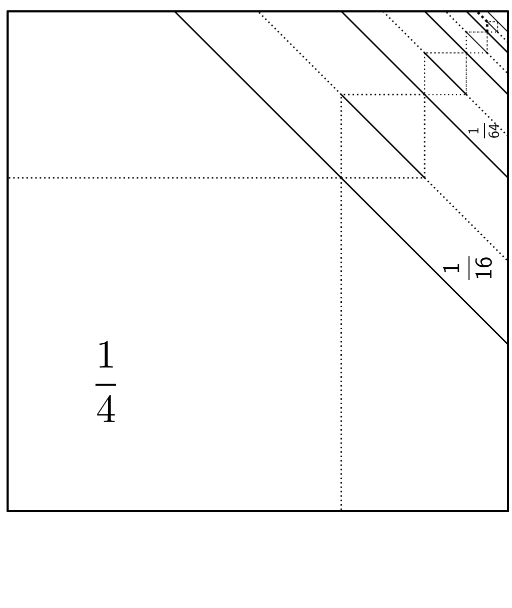


Figura d'origami disenyada per José Ignacio Royo Prieto



Si ho aconseguiu podreu raonar que la suma infinita $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + ...$ és igual a $\frac{1}{3}$

Trencaclosques de diseccions de polígons

Presentem en aquesta pàgina una reflexió didàctica sobre una de les activitats del **mmaca**, que en té una interessant col·lecció a la seva botiga virtual.

Podeu visitar *http://mmaca.cat*.

Com es pot tallar un triangle equilàter en peces amb les quals es pugui reconstruir un quadrat?

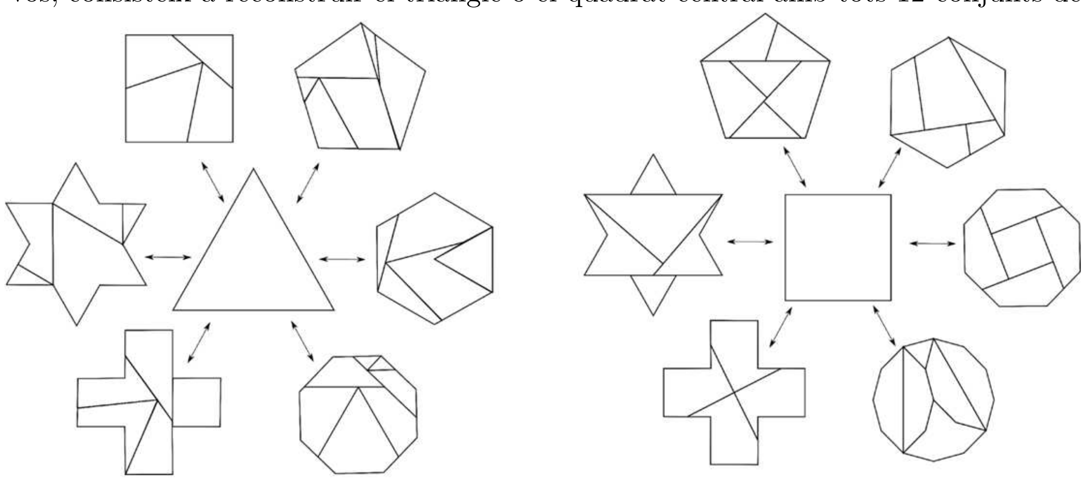
Aquest problema proposat i resolt per Henry Dudeney el 1907 és un exemple de trencaclosques de disseccions. En aquest cas la solució és particularment atractiva, ja que les quatre peces amb què es pot fer són articulables.

El repte dels trencaclosques de disseccions consisteix a utilitzar les mateixes peces per recompondre dos polígons. Naturalment, perquè sigui possible els dos polígons han de tenir la mateixa superfície.

Resulta que donats dos polígons qualssevol amb la mateixa superfície sempre existeix una descomposició en un nombre finit de peces poligonals que permet recompondre'ls. Aquest resultat matemàtic és el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, anomenat així per què va ser demostrat, de forma independent, per aquests tres matemàtics.

La idea de la demostració es fonamenta en el fet que tot polígon es pot dividir en triangles i cada triangle es pot recompondre en un rectangle. El teorema garanteix l'existència d'una descomposició amb un nombre finit de peces, normalment moltes. Tanmateix l'objectiu interessant, és fer-ho amb el nombre mínim de peces. Hi ha multitud de treballs sobre les diferents tècniques utilitzades per a trobar aquestes disseccions mínimes.

A la imatge següent s'han recollit 6 disseccions del triangle equilàter i 6 del quadrat en altres polígons amb 7 peces o menys. Ja es dóna la solució d'una part del trencaclosques, l'altra part, pels qui vulgueu entretenir-vos, consisteix a reconstruir el triangle o el quadrat central amb tots 12 conjunts de peces.



El fet que sempre existeixi una dissecció per a qualsevol parella de polígons amb la mateixa àrea, pot semblar una cosa molt òbvia, però sorprenentment, la qüestió anàloga en dimensió tres té una resposta negativa. Donats dos poliedres amb el mateix volum, no sempre és possible fer una dissecció en peces d'un poliedre que permetin reconstruir l'altre. Precisament aquest és el tercer problema de la famosa llista proposada per David Hilbert l'any 1900 i que va ser resolt, quasi immediatament, de forma negativa.

Per completar el tema us animem a visitar *https://dmsm.github.io/scissors-congruence/* i també *http://mathworld.wolfram.com/Dissection.html*.

XXIV Cangur de la SCM. Dades globals

Nombre de participants: 125.428 (quantitat de concursants pujats a la base de dades.)

- De centres de Barcelona ciutat: 25.573
- De centres de la resta de la província de Barcelona: 66.369
- De centres de la província de Girona: 14.387
- De centres de la província de Lleida: 5.516
- De centres de la província de Tarragona: 13.550
- D'un centre de la Franja de Ponent: 33

Augment global en la participació respecte l'any 2018: 10,76%.

Augment en totes les zones provincials. Rang de variació: entre un 13,20% a la província de Lleida i un 9,95% a la resta de la província de Barcelona.

Cangur de primària: 31.504 participants, augment d'un 7,80 %
Cangur de 1r, 2n i 3r d'ESO: 72.572 participants, augment d'un 13,19 %
Cangur de 4t i batxillerat i CF: 21.352 participants, augment d'un 7,29 %

El Cangur d'aquests nivells es va celebrar en 25 seus universitàries, de totes les universitats públiques catalanes, 8 seus en centres cívics, 33 seus en centres de secundària i 361 centres ho van fer sols al seu propi centre.

Nombre de centres

Centres diferents inscrits en el Cangur 2019: 1.136, augment d'un 3,6 % respecte el Cangur 2018.

- en el Cangur de primària: 494 , augment d'un 4,0 %
- en el Cangur 123ESO: 735, augment d'un 5,7 %
- en el Cangur de 4t d'ESO, batxillerat i CF: 735, augment d'un 3,6 %

XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de cinquè d'EP

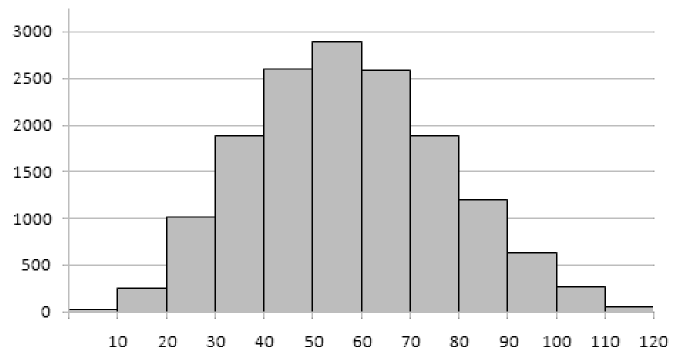
Nombre de participants: 15.737

Augment d'un 7,3% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 452, un 6,6% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 120): 57,8 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
22,0 + 19,7 + 16,1 punts

Puntuació del millor 1%: 106,5 punts
Puntuació del millor 6%: 91,25 punts
Puntuació del millor 10%; 85 punts
Tercer quartil, millor 25%: 71 punts
Mediana: 57 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 1: encert 93,77%; error 4,71%; en blanc 1,52%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 12: encert 21,89%; error 75,73%; en blanc 2,39%

Problemes amb el percentatge més petit d'encert:

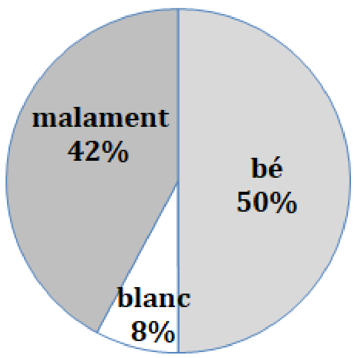
- Problema 20: encert 20,35%; error 61,07%; en blanc 18,58%
- Problema 23: encert 20,34%; error 61,73%; en blanc 17,92%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 10: encert 34,82%; error 63,21%; en blanc 1,97%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 14: encert 75,44%; errors 20,50%; en blanc 4,06%



XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de sisè d'EP

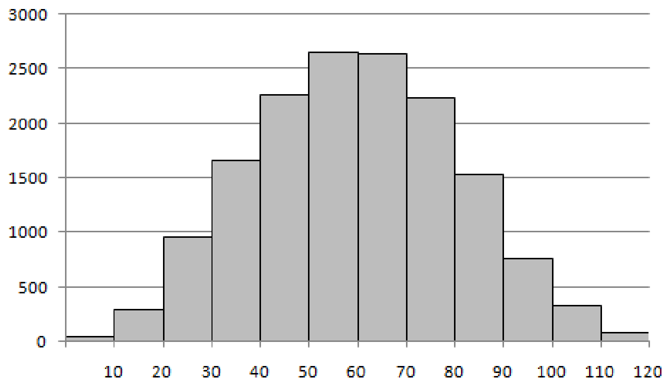
Nombre de participants: 15.767

Augment d'un 7,4% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 477, un 5,5% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 120): 59,9 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
21,4 + 21,0 + 17,5 punts

Puntuació del millor 1%: 107,75 punts
Puntuació del millor 6%: 92,5 punts
Puntuació del millor 10%; 87,5 punts
Tercer quartil, millor 25%: 74,5 punts
Mediana: 60,0 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 1: encert 91,09%; error 7,92%; en blanc 0,99%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 14: encert 28,12%; error 65,21%; en blanc 6,67%

Problemes amb el percentatge més petit d'encert:

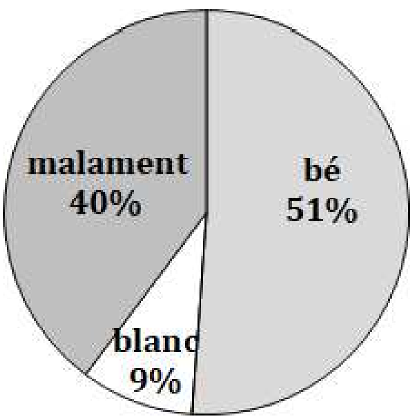
- Problema 21: encert 13,69%; error 62,37%; en blanc 23,94%

Problema que són una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problemes 14 i 15: encert 33,16%; error 64,93%; en blanc 1,90%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 11: encert 73,83%; error 22,34%; en blanc 3,82%



XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de primer d'ESO

Nombre de participants: 26.727,

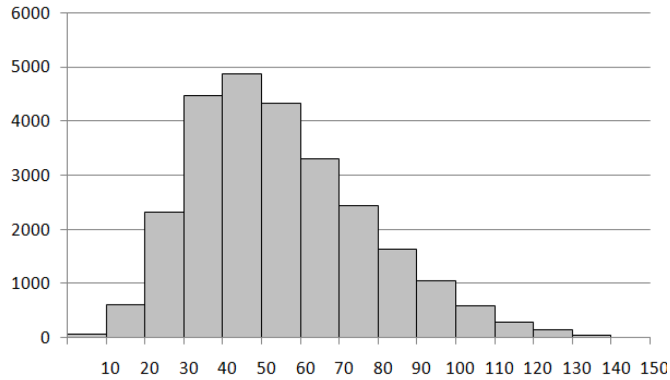
dada que representa més del 32% de la població escolar d'aquest nivell

Augment d'un 11,9% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 675, un 8,2% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 150): 55,4 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
18,3 + 21,9 + 15,2 punts

Puntuació del millor 1%: 118,75 punts
Puntuació del millor 6%: 95,0 punts
Puntuació del millor 10%; 87,25 punts
Tercer quartil, millor 25%: 69,25 punts
Mediana: 51,75 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 2: encert 80,16%; error 14,83%; en blanc 5,02%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

- Problema 9: encert 20,69%; error 77,22%; en blanc 2,09%

Problemes amb el percentatge més petit d'encert:

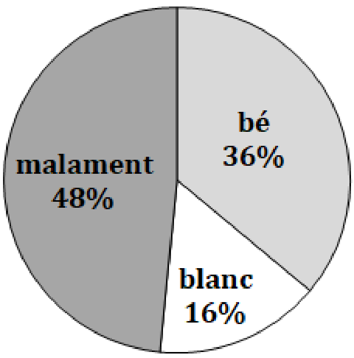
- Problema 30: encert 5,19%; error 76,11%; en blanc 18,70%

Problema que són una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 3: encert 33,69%; error 62,57%; en blanc 3,74%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 11: encert 69,87%; error 26,93%; en blanc 3,20%



XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de segon d'ESO

Nombre de participants: 24.302,

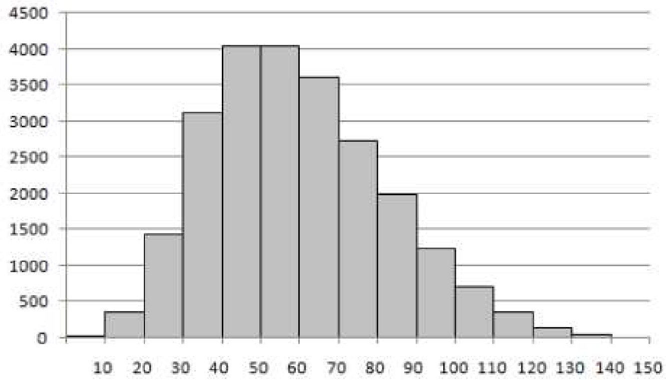
dada que representa gairebé el 30% de la població escolar d'aquest nivell

Augment d'un 12,2% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 683, un 6,9% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 150): 59,9 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
22,5 + 17,9 + 19,5 punts

Puntuació del millor 1%: 118,75 punts
Puntuació del millor 6%: 98,75 punts
Puntuació del millor 10%; 91 punts
Tercer quartil, millor 25%: 74,75 punts
Mediana: 57,5 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 6: encert 90,81%; error 7,95%; en blanc 1,24%

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 19: encert 10,27%; error 56,34%; en blanc 33,37%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

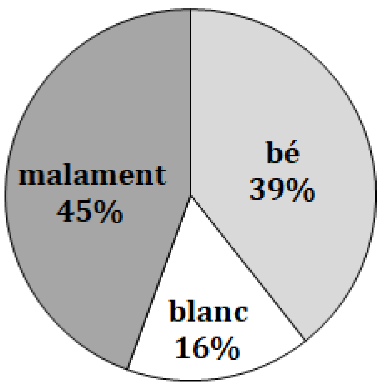
- Problema 18: encert 12,78%; error 82,42%, en blanc 4,79%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 1: encert 24,89%; error 67,32%; en blanc 7,78%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 23: encert 49,75%; error 40,89%; en blanc 9,35%



XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de tercer d'ESO

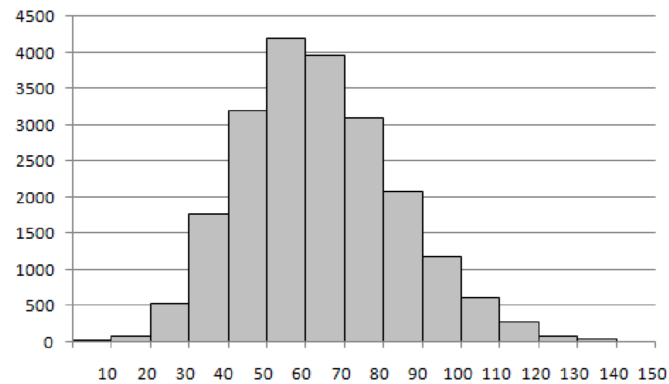
Nombre de participants: 21.543,

Augment d'un 13,8% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 697, un 7,0% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 150): 63,8 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
25,4 + 20,0 + 18,4 punts

Puntuació del millor 1%: 116,25 punts
Puntuació del millor 6%: 97,25 punts
Puntuació del millor 10%; 90,75 punts
Tercer quartil, millor 25%: 76,25 punts
Mediana: 62,25 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 1: encert 93,76%; error 5,05%; en blanc 1,18%

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 21: encert 6,96%; error 62,98%; en blanc 30,05%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

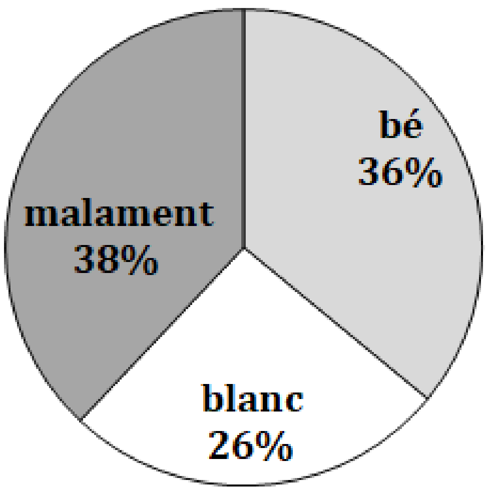
- Problema 16: encert 13,60%; error 79,46%; en blanc 6,93%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 6: encert 34,95%; error 43,70%; en blanc 21,35%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 22: encert 45%; error 41,21%; en blanc 13,78%



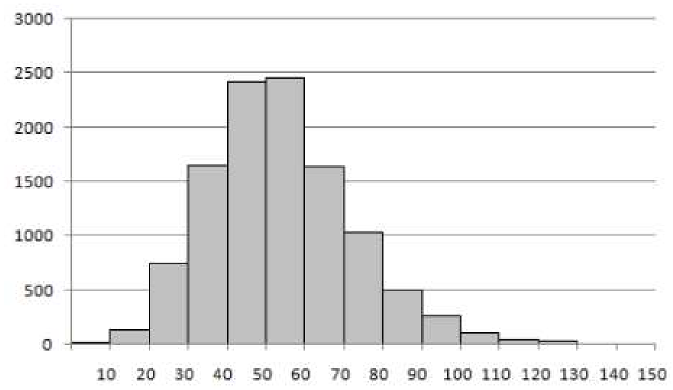
XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de quart d'ESO

Nombre de participants: 11.306,
Augment d'un 11,6% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 689, un 1,3% més que l'any anterior

Mitjana (sobre 150): 54,0 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
19,1 + 20,3 + 14,6 punts

Puntuació del millor 1%: 106,25 punts
Puntuació del millor 6%: 85 punts
Puntuació del millor 10%; 78,25 punts
Tercer quartil, millor 25%: 64,75 punts
Mediana: 52,5 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 2: encert 89,81%; error 9,46%; en blanc 0,70%

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 22: encert 7,40%; error 53,55%; en blanc 39,02%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

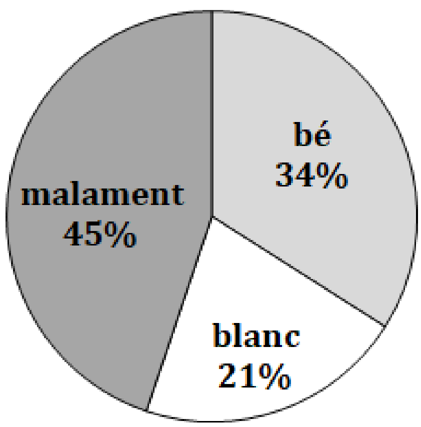
- Problema 10: encert 11,94%; error 80,90%; en blanc 7,13%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 8: encert 21,10%; error 63,85%; en blanc 15,02%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 17: encert 56,58%; error 34,80%; en blanc 8,59%



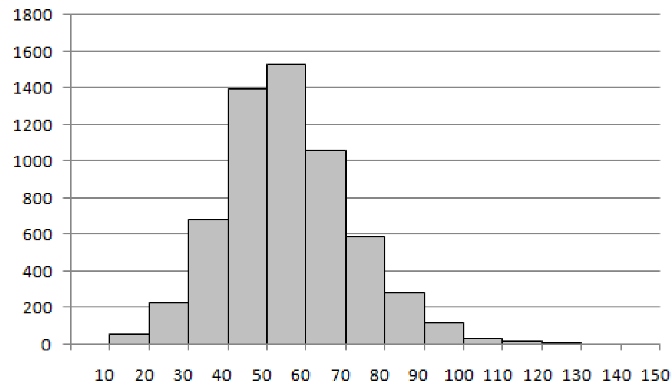
XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de 1r batx./CFGM

Nombre de participants: 6.114,
Augment d'un 2,7% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 488, alguns menys que l'any anterior

Mitjana (sobre 150): 59,9 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
22,5 + 17,9 + 19,5 punts

Puntuació del millor 1%: 100,0 punts
Puntuació del millor 6%: 83,0 punts
Puntuació del millor 10%; 77,25 punts
Tercer quartil, millor 25%: 65 punts
Mediana: 54,5 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 2: encert 91,03%; error 7,73%; en blanc 1,19%

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 30: encert 4,61%; error 38,16%; en blanc 57,19%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

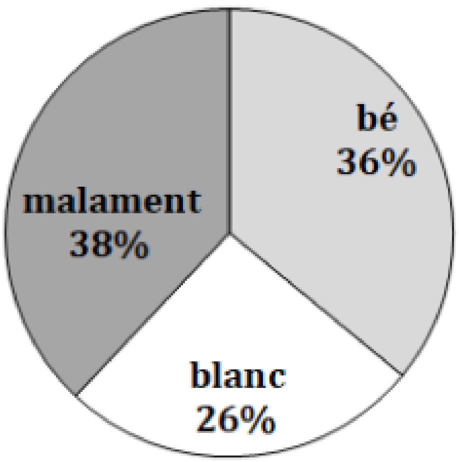
- Problema 4: encert 14,72%; error 70,47%; en blanc 14,77%

Problema que, a més del 4, és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 13: encert 14,47%; error 64,12%; en blanc 21,36%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 15: encert 74,93%; error 21,01%; en blanc 4,01%



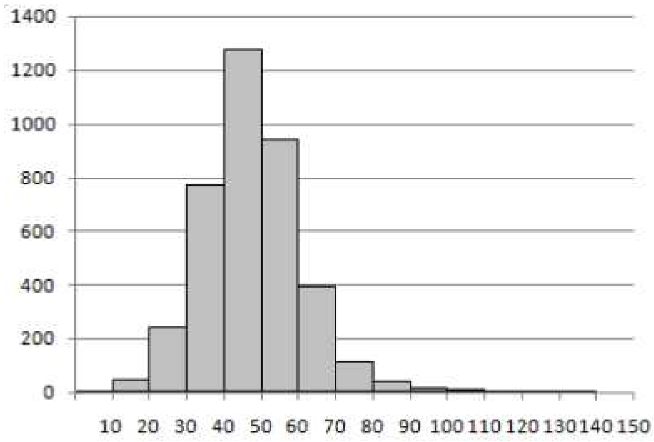
XXIV Cangur de la SCM. Dades estadístiques de 2n batx./CFGS

Nombre de participants: 3.932,
Augment d'un 0,9% en la participació respecte l'any 2018.

Nombre de centres que han participat en aquest nivell: 402, una vintena menys que al 2018

Mitjana (sobre 150): 47,9 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços:
21,8 + 14,2 + 11,9 punts

Puntuació del millor 1%: 87 punts
Puntuació del millor 6%: 68,25 punts
Puntuació del millor 10%; 63,5 punts
Tercer quartil, millor 25%: 55,5 punts
Mediana: 47,25 punts



Problema amb el percentatge més gran d'encert i més petit d'error:

- Problema 4: encert 86,87%; error 10,19%; en blanc 2,86%

Problema amb el percentatge més petit d'encert:

- Problema 28: encert 4,94%; error 34,29%; en blanc 60,69%

Problema amb el percentatge més gran d'error:

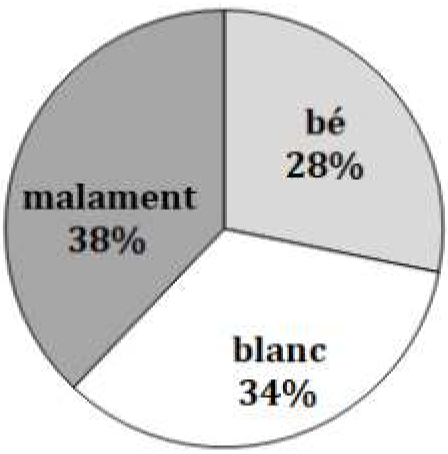
- Problema 5: encert 19,31%; error 66,41%; en blanc 14,21%

Problema que, a més del 5, és una sorpresa pel percentatge d'error:

- Problema 10: encert 13,75%; error 57,84%; en blanc 28,34%

Problema que és una sorpresa pel percentatge d'encert:

- Problema 14: encert 54,98%; error 41,78%; en blanc 3,17%



Prova Cangur 2019 a Catalunya. Alguns problemes resolts

Cadascuna de les persones que componen la comissió Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques ha triat alguns problemes que li han semblat interessants i n'ha escrit la solució. En les pàgines següents podeu trobar la selecció que han fet.

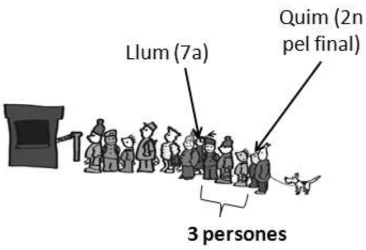
Cinquè d'EP

5. Hi ha 12 infants fent cua a l'entrada del zoo. La Llum és la setena mirant la cua des del principi i en Quim és el segon des del final. Quants infants hi ha entre la Llum i en Quim?

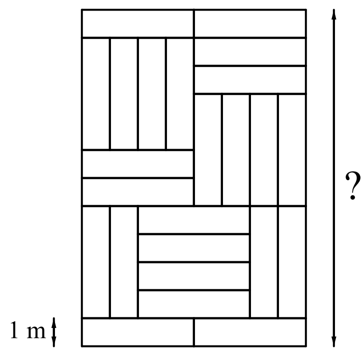
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Resposta: 3.

Com que en total hi ha 12 infants a la cua i la Llum és la setena, vol dir que a darrere seu encara hi queden $12-7=5$ nens. Com que en Quim és el segon des del final entre la Llum i en Quim hi ha $5-2=3$ infants.



15. Una sala està enrajolada amb mosaics rectangulars, tots iguals. El costat petit d'aquests mosaics és d'1 m. Quina és la longitud del costat gran de la sala?



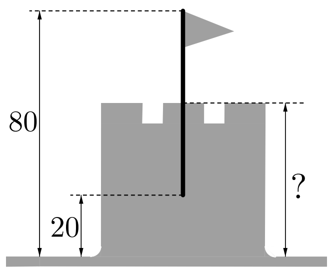
A) 10 m B) 8 m C) 13 m
D) 11 m E) 12 m

Resposta: 12.

Sabent que el costat petit mesura 1 m i el gran 4 m començant a comptar per baix i «pujant per l'esquerra» es pot veure que el costat llarg de la sala abasta $1\text{ m}+4\text{ m}+2\text{ m}+4\text{ m}+1\text{ m}$ (un mosaic posat horitzontal; un posat vertical; dos horitzontals; un vertical, i un altre horitzontal) i per tant mesura 12 m. Semblantment, si miréssim per la dreta trobaríem $1+4+4+3=12$ (aquests últims, 3 mosaics posats horitzontalment.)

21. (*També problema 3 de primer d'ESO*)

La Mar i en Guim van construir un castell de sorra i el van decorar amb una bandera. Van enfonsar la meitat del pal de la bandera a la sorra. Des del punt més alt de la bandera fins al terra hi ha 80 cm, i des del punt més baix del pal fins al terra hi ha 20 cm. Quina és l'altura del castell?



A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm D) 55 cm E) 65 cm

Resposta: 50 cm.

Si ens fixem en la figura que recull les dades de l'enunciat veurem que la longitud total del pal de la bandera és de $80\text{ cm}-20\text{ cm}=60$ cm. Per tant la meitat del pal de la bandera que està enfonsat a la sorra fa 30 cm i, doncs, l'altura del castell és $20\text{ cm}+30\text{ cm}=50$ cm

24. (*També problema 23 de sisè*)

Una d'aquestes cinc noies l'Anna, la Berta, la Carme, la Diana i l'Eulàlia s'ha menjat una galeta.
– L'Anna diu: «Jo no m'he menjat cap galeta».
– La Berta diu: «Jo m'he menjat una galeta».
– La Carme diu: «L'Eulàlia no s'ha menjat cap galeta».
– La Diana diu: «Jo no m'he menjat cap galeta».
– L'Eulàlia diu: «L'Anna s'ha menjat una galeta».
Quatre noies han dit la veritat i l'altra ha dit una mentida. Qui s'ha menjat la galeta?

A) L'Anna B) La Berta C) La Carme D) La Diana E) L'Eulàlia

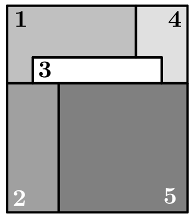
Resposta: La Berta.

Hi ha dues idees importants a retenir.
- Només una noia ha menjat una galeta
- Només una noia menteix.

Si ens fixem en les diferents frases, n'hi ha una que té més pes que les altres: la de la Berta («Jo m'he menjat una galeta»). Si diu la veritat ja tenim la resposta. Ens cal mirar què passa si menteix. En aquest cas la Berta no se l'hauria menjat, però ens trobaríem amb una contradicció entre l'Eulàlia («L'Anna s'ha menjat una galeta») i l'Anna («Jo no m'he menjat cap galeta»). Una de les dues hauria de mentir i no pot ser que hi hagi dues mentideres (la Berta i l'Anna o l'Eulàlia). D'aquí podem deduir que la Berta diu la veritat i s'ha menjat la galeta... i que l'Eulàlia és la mentidera!

Sisè d'EP

8. Cinc targetes quadrades de la mateixa mida s'apilen a la taula, tal com es mostra a la figura. Si ara les volem recollir d'una en una des de la part superior de la pila, en quin ordre les hem de recollir?

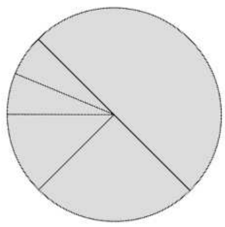


A) 1-2-3-4-5 B) 5-2-3-4-1 C) 4-5-2-3-1
D) 5-3-2-1-4 E) 5-2-3-1-4

Resposta: 5-2-3-1-4.

L'única targeta que es veu sencera és la 5; serà la primera que haurem de recollir i aleshores quedarà a la vista la targeta 2. Quan recollim la 2 la que apareixerà al damunt serà la 3 i, quan recollim aquesta, es veu clar que és la 1 que tapa la 4, que serà, doncs, la darrera que recollirem.

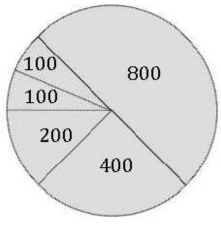
11. La Maria ha tallat el seu pastís d'aniversari per la meitat. Després ha tallat una de les meitats per la meitat. Un dels trossos petits que ha obtingut, també l'ha tallat per la meitat. I encara ho ha fet una altra vegada tallant un dels nous trossos petits en dues meitats. La figura mostra com ha quedat el pastís vist des de dalt. Si un dels trossos petits pesa 100 g, quant pesa tot el pastís?



A) 600 g B) 800 g C) 1200 g D) 1600 g E) 2000 g

Resposta: 1600 g.

Cadascun dels dos trossos petits és la meitat de l'anterior. Idò aquest tros és de 200 g. Per tant el tros del qual aquest n'és la meitat és de 400 g. I el tros gros pesa 800 g. Com que aquest tros és la meitat del pastís, el pes total és de 2×800 g $= 1600$ g, resultat que també podíem trobar (en grams) com $2 \times 100 + 200 + 400 + 800$.



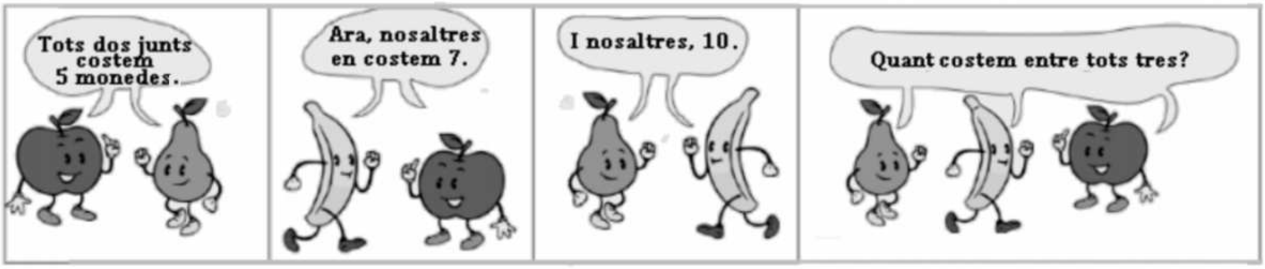
12. En una granja hi ha 15 animals entre vaques, gallines i cabres. Sabem que exactament 10 animals no són vaques i que exactament 8 no són gallines. Quantes vaques i gallines hi ha en total?

A) 8 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Resposta: 12.

Si sumem el nombre d'animals que no són vaques amb el nombre que no són gallines, obtenim 18. Fent això és clar que ja haurem comptat tots els animals, però obtenim més de 15 perquè haurem comptat dos cops els que no són vaques ni gallines, que seran 3. Per tant entre vaques i gallines són $15 - 3 = 12$.

16.

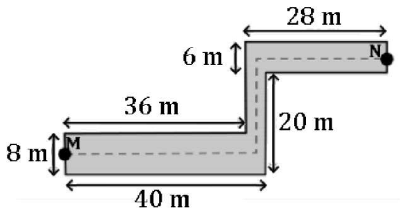


A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Resposta: 11.

Si sumem les dades de les tres primeres vinyetes ens adonarem que dos plàtans, dues peres i dues pomes costen $5 + 7 + 10 = 22$ moneds. Per tant un plàtan, una pera i una poma costen $\frac{22}{2} = 11$ moneds.

20. (*També problema 15 de primer d'ESO*)
Un passadís té la forma i les dimensions que es veuen a la figura. Un gat camina per la línia discontínua, des de M fins a N, tota l'estona justament pel centre del passadís. Quina distància recorrerà?

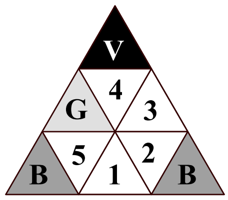


A) 68 m B) 69 m C) 71 m D) 83 m E) 88 m

Resposta: 83 m.

Com que el gat es passeja pel mig del passadís ens haurem de fixar atentament en el camí que fa i anar sumant i restant part de les mides que ens donen. En el primer tram 40 m − 36 m = 4 m i per tant el gat haurà caminat: $36\text{ m} + \frac{4}{2}\text{ m} = 38\text{ m}$. En el segon tram $20\text{ m} - \frac{8}{2}\text{ m} + \frac{6}{2}\text{ m} = 19\text{ m}$. En el tercer tram 28 m − 2 m = 26 m. Per tant el camí que ha fet el gat serà de 38 m + 19 m + 26 m = 83 m.

22. (*També problema 18 de primer d'ESO*)
La Maria té 9 triangles petits: 3 són verds (V), 3 són grocs (G) i 3 són blaus (B). Vol compondre un gran triangle ajuntant aquests 9 petits triangles, de manera que dos triangles amb un costat en comú siguin de colors diferents. Ja ha posat quatre triangles, com es mostra a la imatge. Després d'haver acabat, quina de les afirmacions següents és certa?



A) 1 és groc i 3 és verd. B) 1 és blau i 2 és verd. C) 1 i 3 són verds.
D) 5 és verd i 2 és groc. E) 1 i 3 són tots dos grocs.

Resposta: 1 i 3 són tots dos grocs.

Per l'enunciat resulta que el $\triangle 4$ ha de ser blau (B) i que el $\triangle 5$ ha de ser verd. Per tant, en portem 1 groc, 2 verds i 3 blaus. Ja no en podem tenir més de blaus. Com que el $\triangle 5$ és verd (V) i no n'hi poden haver més de blaus, el $\triangle 1$ només pot ser groc (G). Es dedueix que el $\triangle 2$ ha de ser verd i, finalment, el $\triangle 3$ ha de ser groc (G).

Primer d'ESO

12. (*També problema 9 de segon d'ESO.*)

Escrivim els sis primers nombres senars, un en cadascuna de les cares d'un dau. Tirem tres vegades el dau i sumem els valors obtinguts. Quin dels resultats següents no pot ser la suma?

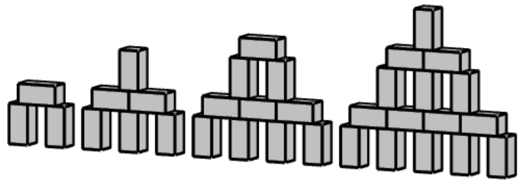
A) 21 B) 3 C) 20 D) 19 E) 29

Resposta: 20.

Si sumem tres nombres imparells el resultat és, amb tota seguretat imparell. Per tant és segur que el valor que no podem obtenir és 20. Sí que podem obtenir els altres amb sumands 1, 3, 5, 7, 9 o 11, que escpoden repetir. Per exemple: $1+1+1=3$, $3+5+11=19$, $7+7+7=21$ i $9+9+11=29$.

21. (*També 14 de segon d'ESO*)

Amb blocs que mesuren 1 cm × 1 cm × 2 cm, la Joana ha fet les quatre construccions que es mostren a la imatge. Quina altura tindrà la construcció feta d'aquesta manera amb 28 blocs?



A) 12 cm B) 11 cm C) 9 cm
D) 14 cm E) 17 cm

Resposta: 11.

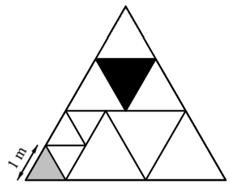
Es tracta d'un problema de reconeixement de patrons o preàlgebra. A cada pas la construcció s'incrementa un pis que serà horitzontal o vertical en funció de si el pas és senar o parell. Es pot observar que la quantitat de peces que s'hi afegeixen d'una construcció a la següent és una més que el nombre de pisos que té. Vegeu-ho:

Construcció (pas)	Nombre de peces	Nombre de pisos	Altura
1	3	2	3 cm
2	3 + 2 + 1 = 6	3	5 cm
3	6 + 3 + 1 = 10	4	6 cm
4	10 + 4 + 1 = 15	5	8 cm
5	15 + 5 + 1 = 21	6	9 cm
6	21 + 6 + 1 = **28**	7	**11 cm**

A partir de l'esquema triangular de les construccions també podríem haver observat que la quantitat de peces amb les que es fa una construcció és un nombre triangular $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ on n és el nombre de pisos que té la figura. Aleshores veiem que el 28 de l'enunciat és la meitat de $56 = 7 \times 8$. Per tant la construcció feta amb 28 blocs té 7 pisos. Com que cada dos pisos s'aconsegueix una altura de 3 cm (primer se'n posa una de 2 cm i després una de 1 cm). Així doncs, $7 = 3 \times 2 + 1$ pisos tindran una altura de 3×3 cm $+ 2$ cm $= 11$ cm.

23. (*També problema 15 segon d'ESO*)

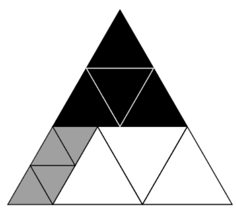
El triangle equilàter gran de la figura està dividit en onze triangles equilàters. El costat del triangle petit de color gris mesura 1 m. Quina és la mesura del costat del triangle negre?



A) 1,25 m B) $\sqrt{2}$ m C) 1,5 m D) $\sqrt{3}$ m E) 2 m

Resposta: 1,5 m.

Com que els quatre triangles grisos en la nova figura són equilàters, han de ser iguals i per tant el costat de cadascun és 1 m. Així doncs, el costat del triangle blanc adjacent a aquells mesura 2 m i igualment també el dels altres dos triangles blancs (són tots tres iguals). En la figura s'ha dibuixat un triangle gros de color negre, que té costat igual a 3 m (1 m + 2 m, costat del gris més costat del blanc). Aquest triangle està format per quatre triangles iguals a aquell del qual es demana la longitud del costat i, per tant, cada un d'aquests triangles tindrà per costat la meitat de la del triangle gros de color negre, $\frac{3}{2} = 1,5$.

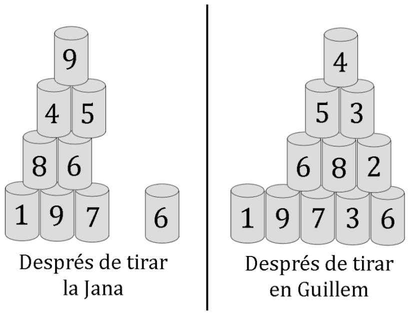


En la contraportada d'aquesta publicació teniu una demostració visual de la solució d'aquest problema.

26. (*També problema 22 de segon d'ESO*)

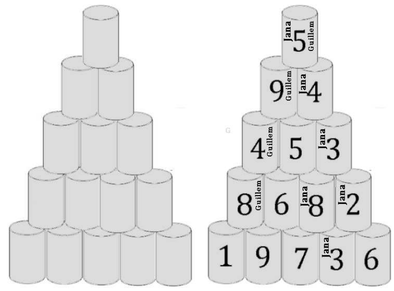
La Jana i en Guillem tiren pilotes a dues piràmides de cinc pisos, idèntiques. Cada piràmide està formada per 15 llaunes numerades amb els punts que donen. La Jana ha tombat 6 llaunes, que ja no es veuen a la figura, amb un total de 25 punts. En Guillem ha tombat 4 llaunes. Quants punts ha aconseguit en Guillem?

A) 22 B) 23 C) 25 D) 26 E) 28



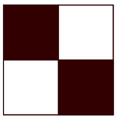
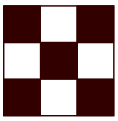
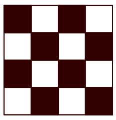
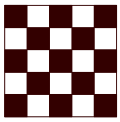
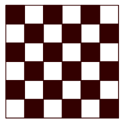
Resposta: 26.

La primera cosa que cal fer és observar quina és l'estructura de la piràmide, que l'enunciat diu que té cinc pisos, i completar la piràmide inicial (és a dir, abans que la Jana i el Miquel hagin tombat les llaunes). Si comparem les dues piràmides tal com han quedat veurem que a la fila inferior i d'esquerra a dreta, hi haurà d'haver les llaunes amb valor 1, 9, 7, 3, 6; a la segona fila hi haurà les llaunes amb valor 8, 6, 8, 2; a la tercera fila hi haurà les llaunes amb valor 4, 5, 3; a la quarta fila hi haurà les llaunes amb valor 9, 4. La llauna de la fila superior l'han tombat tant l'una com l'altre, i podem deduir que ha de tenir valor 5 ja que sabem que la Jana ha tombat en total 25 punts. Llavors el Guillem haurà tombat llaunes per valor de 26 punts. La imatge de la dreta mostra la piràmide amb la indicació de quines llaunes haurà tombat la Jana i quines en Guillem.



29. (*També problema 14 de segon d'ESO*)

Cinc quadrats iguals estan dividits en quadrats més petits. Quin dels quadrats té més gran l'àrea pintada de color negre?

A)  B)  C)  D)  E) 

Resposta: B.

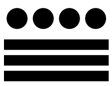
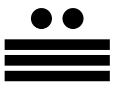
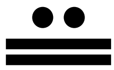
Les figures **A**, **C** i **E** tenen la mateixa àrea pintada de blanc que de negre, ja que en totes les files es reprodueix el mateix patró (mateix nombre de quadrats petits blancs que negres). L'àrea pintada de negre és, doncs, 1/2 del total.

B i **D** tenen més de la meitat de l'àrea del quadrat pintada de negre. En el cas de la figura **B** hi ha 3×3 quadrats, dels quals 5 són negres i, per tant, l'àrea negra representa 5/9 del total. En el cas **D**, que té 5×5 quadrats, 13 són negres idò l'àrea negra representa 13/25 del total. Com que $\frac{5}{9} > \frac{13}{25}$, la resposta és la figura **B**.

Segon d'ESO

2. (*També problema 2 de primer, i una variant és el problema 2 de sisè.*)

Els Maies representaven els nombres amb punts i ratlles. Utilitzaven un símbol per a l'1 i un altre símbol per al 5. Com representaven el 17?

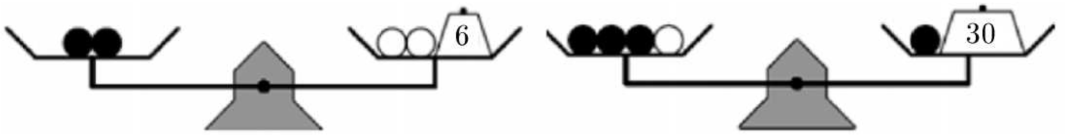
A)  B)  C)  D)  E) 

Resposta: D.

Cal pensar de quines maneres es pot escriure el 17 com a suma d'un múltiple de 5 més un altre nombre. Tenim $17 = 3 \times 5 + 2$, que correspon a la figura D. També pot ser $17 = 2 \times 5 + 7$ (o amb un sol 5 o cap 5) que necessitarien més símbols que els que apareixen en cap de les figures. De fet, lògicament, la numeració maia emprava un màxim de 4 símbols iguals a 1.

20. (*També és el problema 28 de primer.*)

Sis boles idèntiques de color negre i tres boles idèntiques de color blanc es col·loquen en dues balances i s'equilibren amb uns pesos (de 6 g i de 30 g, respectivament), tal com mostren les imatges.



Quin és el pes total d'aquestes nou boles?

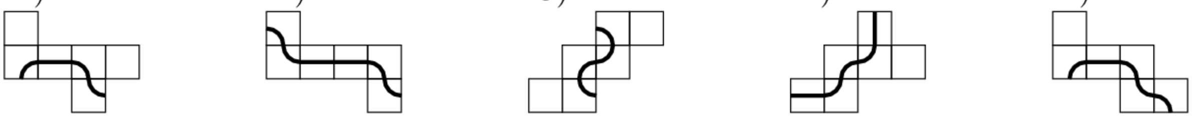
A) 100 g B) 99 g C) 96 g D) 94 g E) 90 g

Resposta: E.

Si en la balança de la dreta substituïm dues boles negres per dues boles blanques i el pes de 6 kg veurem que tres boles blanques s'equilibren amb $30 - 6 = 24$ kg, i per tant cada bola blanca pesa 8 kg. Aleshores si mirem la balança de l'esquerra veurem que dues boles negres pesen 22 kg. Per tant cada bola negra pesa 11 kg. En total, doncs, les sis boles negres i les tres blanques pesen, conjuntament, $6 \times 11 + 3 \times 8 = 90$ kg.

24. Cada una de les imatges següents mostra el desplegament d'un cub. Només en un dels cubs que es formen hi apareix una línia tancada. Quin és?

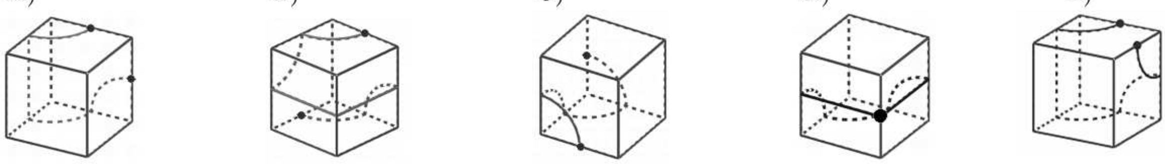
A) B) C) D) E)



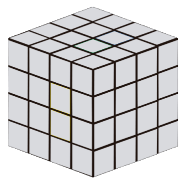
Resposta: D.

És clar que cal imaginar cadascun dels cubs, una vegada construïts. Són aquests:

A) B) C) D) E)



29. En Liam construeix un cub $4 \times 4 \times 4$ utilitzant cubets $1 \times 1 \times 1$. Se sap que 32 d'aquests cubets són de color blanc i 32 són de color negre. En Liam col·loca els cubets de manera que sigui blanca la màxima superfície possible. Si ho fa així, quina fracció de la superfície del cub és blanca?

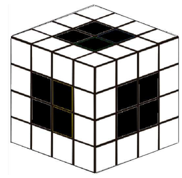


A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

Resposta: $\frac{3}{4}$.

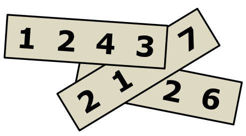
El cub gran té $4^3 = 64$ cubs petits (cubs d'$1 \times 1 \times 1$) i l'enunciat ens diu que 32 són de color blanc i 32 són de color negre. Aquest cub gran té una superfície de $6 \cdot 16 = 96$ cares petites i visibles des de l'exterior té trs tipus de cubs petits: hi ha 8 cubs petits (els que estan en els vértexs) dels quals en veiem tres cares; hi ha 24 cubs petits (els que estan a les arestes però no en els vèrtexs) dels quals en veiem dues cares, i també tenim 24 cubs petits dels quals només en veiem una cara.

Com que volem que sigui blanca la màxima superfície possible, aleshores col·locarem el màxim de cubets petits blancs a les posicions on veiem més cares petites. Com que entre els cubs petits a les posicions on es veuen tres i dues cares en tenim $8+24 = 32$ ja haurem col·locat tots els cubets petits blancs que tenim, tal com mostra la figura de la dreta. Per tant, veurem $8 \cdot 3 + 24 \cdot 2 = 72$ cares petites. Per tant la fracció de superfície blanca que veurem és de 72 respecte 96, $\frac{72}{96} = \frac{3}{4}$.



Tercer d'ESO

11. (*Variants en altres nivells*) Disposem de tres cartolines en les quals hi ha un nombre de quatre xifres en cada una d'elles. Si posem les cartolines tal com es mostra a la figura resulta que la suma dels tres nombres de les cartolines és 10126. Quin és el valor dels dígits que no es veuen?



A) 3, 5 i 6 B) 4, 5 i 6 C) 5, 6 i 7 D) 4, 6 i 7 E) 4, 5 i 7

Resposta: 5, 6 i 7.

En aquest exercici ens cal fer una suma clàssica i podria haver estat presentat com a la imatge de la dreta, amb a, b, c dígits desconeguts.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,4\,3 \\ +\ \ 2\,1\,a\,7 \\ +\ \ b\,c\,2\,6 \\ \hline 1\,0\,1\,2\,6 \end{array}$$

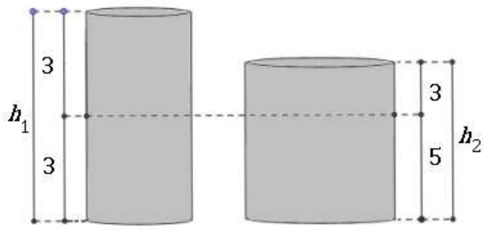
Anem fent pas per pas. Per a les unitats, $3 + 7 + 6 = 16$, anotem el 6 i en portem 1. Per a les desenes $4 + a + 2\ ^{(+1)} = *2$; en aquest cas l'única opció perquè hi hagi un 2 al final, és que la suma sigui 12 i que $a = 5$; d'aquesta manera $4 + 5 + 2\ ^{(+1)} = 12$ i també en portem 1. Per a les centenes, $2 + 1 + c\ ^{(+1)} = *1$; en aquest cas ha de resultar 11 i doncs, $c = 7$. Finalment, $1 + 2 + b\ ^{(+1)} = 10$, per tant $b = 6$.

21. En Josep té dues espelmes cilíndriques amb diferents altures i diàmetres. La primera espelma dura 6 hores, i la segona en dura 8. Si encén totes dues espelmes al mateix moment i al cap de 3 hores tenen la mateixa altura, quina és la relació existent entre les altures inicials?

A) 4 : 3 B) 8 : 5 C) 5 : 4 D) 3 : 5 E) 7 : 3

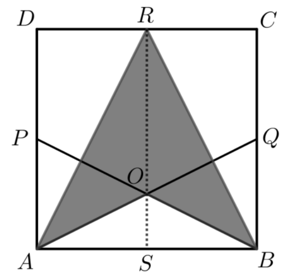
Resposta: 5:4.

La primera espelma tarda 6 hores en consumir-se mentre que la segona en tarda 8. Per tant quan hagin passat 3 hores la primera espelma estarà a la meitat mentre que a la segona encara li'n quedaran 5 hores. Aquesta situació es pot veure en l'esquema de la dreta.



Per tant la meitat de l'altura de la primera espelma és igual que els $\frac{5}{8}$ de la segona, $\frac{1}{2}h_1 = \frac{5}{8}h_2$ i d'aquí podem deduir que $\frac{h_1}{h_2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. Idò la resposta és que la relació entre les altures és de 5 : 4.

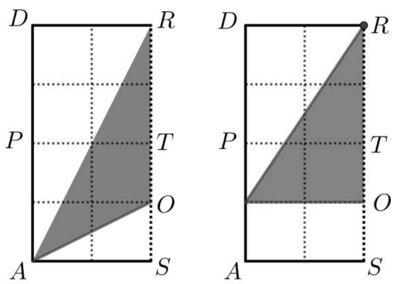
29. El diagrama mostra el quadrat $ABCD$ amb P, Q i R els punts mitjans dels costats DA, BC i CD respectivament. Quina fracció de l'àrea del quadrat $ABCD$ està ombrejada?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{16}$ E) $\frac{3}{8}$

Resposta: $\frac{3}{8}$.

Per R podem traçar un segment, RS, paral·lel al costat DA. La figura és simètrica respecte el segment traçat i, per tant, la fracció d'àrea ombrejada serà la mateixa que si considerem només la meitat de la figura; prendrem el rectangle $ADRS$.



Per la construcció, $APQB$ és un rectangle i O n'és el punt mitjà i així O es troba a la meitat d'altura que Q o que P respecte AB. Aleshores si unim adequadament els punts mitjans de DR, RT, TS, SA, AP i PD, tal com es veu a la primera figura de la dreta, podem dividir el rectangle en 8 quadrats iguals. L'àrea ombrejada és un triangle que té la mateixa àrea que el triangle de la segona figura de la dreta, ja que tenen la mateixa base i altura. Així doncs, com que aquest triangle ocupa 3 dels 8 quadrats, la fracció d'àrea ombrejada és $\frac{3}{8}$.

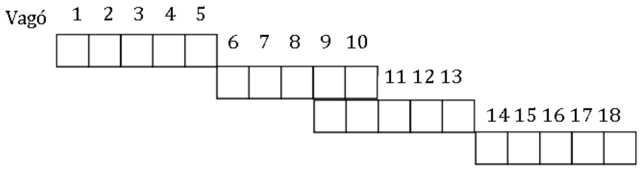
Alternativament, en el problema anterior, podem restar l'àrea del triangle ARB menys la del triangle AOB. Vista la posició del punt O tindrem $\frac{c \cdot c}{2} - \frac{c \cdot \frac{c}{4}}{2} = \frac{3}{8}c^2$.

30. Un tren està format per 18 vagons. Al tren hi ha en total 700 passatgers. En qualsevol bloc de cinc vagons adjacents hi ha 199 passatgers en total. Quants passatgers hi ha, en total, als dos vagons del mig del tren?

A) 70 B) 77 C) 78 D) 96 E) 103

Resposta: 96.

Considerem els quatre blocs de 5 vagons adjacents que s'indiquen a la imatge. El resultat de sumar el nombre de passatgers que hi ha en aquests quatre blocs és $199 \times 4 = 796$. Com que hem sumat dues vegades els passatgers que hi ha en els vagons 9 i 10, que són justament els del mig, en aquests dos vagons hi ha $796 - 700 = 96$ passatgers.



Quart d'ESO

12. (*També és el problema 6 de primer de batxillerat*)

Un parc té cinc portes. La Mònica vol entrar per una porta i sortir per una de diferent. De quantes maneres diferents ho pot fer?

A) 25 B) 20 C) 16 D) 15 E) 10

Resposta: 20.

Criteri fonamental: si cada una d'un conjunt de possibilitats es combina amb cada una d'unes altres, cal multiplicar els dos nombres per tenir el total de possibilitats. Aquí tenim 5 possibles entrades i, en cada cas, 4 possibles sortides, és a dir que tenim en total $5 \times 4 = 20$ maneres de fer-ho.

18. El capità Barbanegra va trobar quatre manuscrits amb les informacions següents sobre la ubicació d'un tresor que està enterrat en una illa:
«El tresor és a Cabrera o a Sa Conillera.» «El tresor és a Eivissa.»
«El tresor és a Formentera.» «El tresor no és a Sa Conillera.»
Sabem que només una d'aquestes quatre informacions és certa i que el tresor està enterrat en alguna d'aquestes quatre illes. En quina illa està enterrat?

A) Cabrera B) Eivissa C) Formentera D) Sa Conillera
E) Només amb aquesta informació no es pot saber en quina illa està enterrat

Resposta: Sa Conillera.

Esbrinem primer quina de les afirmacions és la certa. Ni la segona ni la tercera no ho poden ser, perquè aleshores també ho seria la quarta (si fos a Eivissa no seria a Sa Conillera i, si fos a Formentera, tampoc no seria a Sa Conillera). Si la quarta fos certa, aleshores ho seria alguna de les altres tres. Si no és a Sa Conillera, seria o bé a Eivissa (la segona també seria certa), o bé a Formentera (també ho seria la tercera) o bé a Cabrera (i la primera també seria certa). Així ha de ser la primera l'afirmació certa. Ara vegem a quina illa és el tresor, a Cabrera o a Sa Conillera? Si el tresor fos a Cabrera, aleshores la 4a afirmació seria certa i tindríem dues afirmacions certes. Per tant, el tresor ha de ser a Sa Conillera.

24. En David té un nombre de tres xifres diferents. Canvia els dígits per lletres i obté la paraula ONE. Fet així s'adona que es compleix la igualtat $ONE + ONE + ... + ONE = 2331$. Quantes vegades apareix la paraula ONE en la igualtat anterior?

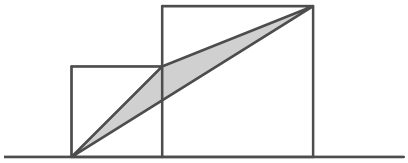
A) 2331 B) 9 C) 7 D) 37 E) Es poden obtenir diferents opcions.

Resposta: **9**.

La pregunta que se'ns fa és calcular el valor de n en l'expressió $n \cdot ONE = 2331$. Tenim que 2331, descompost en factors primers, és $3^2 \cdot 7 \cdot 37$ i, per tant té $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ divisors que, escrits per parelles que multiplicades donen 2331, són $\{1, 2331\}$, $\{3, 777\}$, $\{7, 333\}$, $\{9, 259\}$, $\{21, 111\}$, $\{37, 63\}$. Si analitzem la llista de divisors es veu que l'únic nombre de tres xifres que pot fer el paper de ONE, amb les tres xifres diferents, és 259. Per tant $n = 9$ i el nombre de tres xifres ONE apareix 9 vegades.

27. (*El prob. 18 de 2n de batx. és una generalització d'aquest.)*

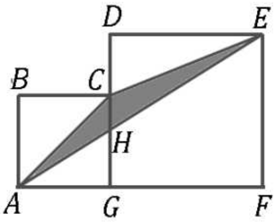
Tenim dos quadrats amb les longituds dels costats, respectivament, de 6 i de 10 i estan dibuixats tal com es mostra a la imatge. Quina és l'àrea del triangle ombrejat?



A) $\sqrt{60}$ B) 18 C) 50 D) 34 E) 68

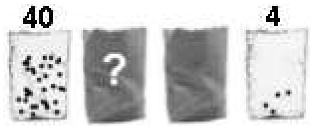
Resposta: 18.

Tal com hem anomenat els punts a la figura de la dreta, el triangle rectangle AGH, de catets 6 i GH i el triangle rectangle AFE de catets $6+10=16$ i 10 són dos triangles semblants. Per tant $\frac{GH}{6}=\frac{10}{16}$. Resulta $GH=\frac{15}{4}$. Serà doncs $HC=6-\frac{15}{4}=\frac{9}{4}$; ara bé, aquest segment és la base comuna dels triangles ACH i CHE que componen l'àrea demanada i que tenen altures respectives sobre aquesta base 6 i 10 cm. L'àrea demanada serà doncs $\frac{\frac{9}{4}\cdot(6+10)}{2}=18$.



Us animem a que consulteu el problema 18 de segon de batxillerat, i que generalitzeu aquesta solució. Allà se'n comenta una altra, que naturalment també es podria aplicar aquí: es tracta de restar a la suma de les àrees dels dos quadrats la suma de les àrees dels triangles rectangles ABC, AEF i CDE.

28. En quatre bosses de paper hi ha un total de 100 boles. La figura les mostra ordenades d'esquerra a dreta, des de la primera, que és la més plena i conté 40 boles, fins a la més buida, que en conté 4, i sabem que no hi ha dues bosses amb el mateix nombre de boles. Si M és el nombre més gran de boles que hi pot haver en la segona bossa, i m n'és el nombre més petit, quin és el valor de $M-m$?



A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Resposta: 10.

Entre la segona i la tercera bossa hi ha d'haver $100-40-4=56$ boles. Com que les bosses estan ordenades de més a menys nombre de boles, hem d'estudiar les sumes $s+t=56$, amb $40>s>t>4$. Com que $40>s$ hi pot haver un màxim de 39 boles a la segona bossa (en aquest cas, amb 17 a la tercera) i la M de l'enunciat és 39. El mínim de boles que podem posar a la segona bossa coincidirà amb el màxim que podem posar a la tercera i això passa per a la suma $29+27$ i, per tant, $m=29$. La diferència $M-m=39-29=10$.

29. La suma de les edats d'en Pere i la Júlia és 91. Actualment, l'edat de la Júlia és el doble de l'edat que en Pere tenia quan la Júlia tenia l'edat que ara té en Pere. Quants anys té la Júlia?

A) 32 B) 38 C) 44 D) 52 E) 56

Resposta: 52.

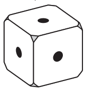
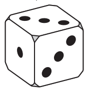
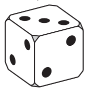
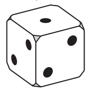
Hi ha dues situacions temporals: la del moment en què les edats sumen 91; indicarem l'edat de la Júlia en aquest moment X i la d'en Pere Y, i la situació anterior en la qual la Júlia tenia l'edat que ara té en Pere (Y). En aquesta situació anterior en Pere tenia l'edat que té ara menys els anys que han passat, que són els mateixos que han passat per a la Júlia, és a dir $X-Y$.

	Júlia	Pere
Abans	Y	$Y-(X-Y)$
Ara	X	Y

Sabem dues coses: que la suma de les edats actuals és 91, per tant $X+Y=91$ i que l'edat de la Júlia és el doble de l'edat que tenia en Pere abans, per tant $X=2(Y-X+Y)$. Si resolem el sistema format per aquestes dues equacions obtenim $Y=39$ i $X=52$.

Primer de batxillerat

15. Cadascuna de les cares d'un dau està marcada amb 1, 2 o 3 punts, de manera que la probabilitat d'obtenir un 1 és 1/2, la probabilitat d'obtenir un 2 és 1/3 i la probabilitat d'obtenir un 3 és 1/6. Quina de les imatges següents no pot ser una vista d'aquest dau?

A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

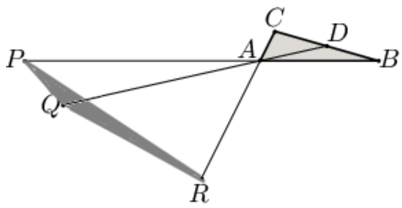
Resposta: C.

Cal que raonem quantes cares hi ha pintades amb un 1, quantes amb un 2 i quantes amb un 3. Comprovem que la suma de les probabilitats donades és 1, i per tant es descriuen totes les cares. Com que un dau té 6 cares, si per l'**1** la probabilitat és $\frac{1}{2}$, hem de multiplicar aquest valor per 6, i són 3 cares amb un 1; semblantment en el cas del **2**, tenim $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ cares, i en el cas del **3**, probabilitat $\frac{1}{6}$, tenim 1 cara. Podem veure que l'opció **C** no és possible ja que s'hi veuen dues cares amb el **3**.

29. El triangle $\triangle ABC$ té àrea k i D és el punt mitjà de BC. Els punts P, Q i R són a les rectes AB, AD i AC, respectivament, tal com mostra la figura, de manera que

$$\overline{AP} = 2 \cdot \overline{AB},\ \overline{AQ} = 3 \cdot \overline{AD} \text{ i } \overline{AR} = 4 \cdot \overline{AC}.$$

Quina és l'àrea del triangle $\triangle PQR$?



A) k B) $2k$ C) $3k$ D) $\frac{1}{2}k$

E) 0, perquè els punts P, Q, R estan alineats.

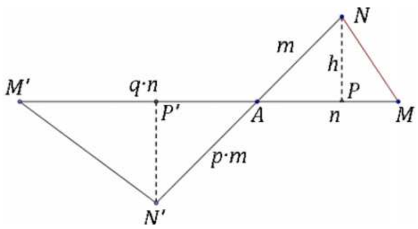
Resposta: k.

En la figura que es mostra amb el dibuix de $\triangle PQR$ (que en realitat no apareixia dibuixat a l'enunciat) podem veure que àrea $\triangle PQR =$ àrea $\triangle APQ +$ àrea $\triangle AQR -$ àrea $\triangle APR$ (*).

Es tracta de tres triangles construïts, respectivament, a partir del $\triangle ABD$ que té àrea $\frac{k}{2}$, del $\triangle ADC$ que també té àrea $\frac{k}{2}$, i del $\triangle ABC$ que té àrea k, tots tres amb una construcció anàloga: s'allarguen dos costats en unes proporcions donades, de manera que en el nou triangle queda un angle oposat pel vèrtex a l'angle en A dels triangles inicials.

Lema. Estudiem aquesta situació en general. A partir del $\triangle AMN$ hem construït el $\triangle AM'N'$ de manera que $\overline{AM'} = q \cdot \overline{AM}$ i $\overline{AN'} = p \cdot \overline{AN}$. Si tracem les altures dels dos triangles per N i N' aleshores $\triangle APN$ i $\triangle AP'N'$ són semblants amb raó de semblança $\frac{AN'}{AN} = p$. Així doncs si posem $NP = h$ serà $N'P' = p \cdot h$.

Calculem les dues àrees i veiem que àrea $\triangle AM'N' = p \cdot q \cdot$àrea $\triangle AMN$.



Si ara apliquem al nostre cas el Lema que acabem de demostrar tindrem que l'àrea del $\triangle APQ$ és $2 \cdot\ 3 \cdot \frac{k}{2} = 3k$; que l'àrea del $\triangle AQR$ és $3 \cdot\ 4 \cdot \frac{k}{2} = 6k$ i que àrea $\triangle APR = 2 \cdot\ 4 \cdot k = 8k$. Si substituïm aquests valors en l'expressió (*) que hem indicat anteriorment per a deduir el valor de l'àrea del $\triangle PQR$ veiem que és justament k.

En la contraportada d'aquesta publicació teniu una demostració visual que mostra que l'àrea del triangle PQR és la mateixa que l'àrea del triangle inicial ABC.

30. Quants nombres enters de quatre xifres, és a dir del conjunt $\{1000, 1001, 1002, \ldots, 9998, 9999\}$, tenen la propietat que, si en suprimim una xifra qualsevol, el nombre que en resulta és un divisor del nombre original?

A) 5 B) 9 C) 14 D) 19 E) Cap

Resposta: 14.

Si $abcd$ és un nombre de quatre xifres que compleix l'enunciat, els nombres abc, abd, acd i bcd son divisors de $abcd$.

Serà $1000a+100b+10c+d = x\cdot(100a+10b+c)$ i com que $\dfrac{1000a+100b+10c+d}{100a+10b+c} = 10 + \dfrac{d}{100a+10b+c}$, d'aquí es dedueix que ha de ser $x = 10$ i $d = 0$.

Passem ara al segon. Serà $1000a+100b+10c+0 = y\cdot(100a+10b+0)$ i raonant com abans tenim $y = 10$ i $c = 0$.

Continuem: $1000a+100b+0+0 = z\cdot(100a+0+0)$. Com que $\dfrac{1000a+100b}{100a} = 10 + \dfrac{b}{a}$ ha de ser enter, es dedueix que a divideix b. Semblantment, a partir de $1000a+100b+0+0 = t\cdot(100b+0+0)$ es pot deduir que b és un divisor de $10a$.

Les condicions que a divideixi b i que b divideixi $10a = 2\cdot 5\cdot a$ i el fet que $a > 0$ fan que les úniques possibilitats per a a i b siguin $a = b$, $a = 2b$ i $a = 5b$. Com que ja sabem que $c = d = 0$, trobem:

- amb $a = b$ i $c = d = 0$, 9 nombres que compleixen l'enunciat: 1100, 2200, ..., 9900,
- amb $b = 2a$ i $c = d = 0$, 4 nombres que corresponen a $a = 1, 2, 3, 4$, que són 1200, ..., 4800,
- i amb $b = 5a$ i $c = d = 0$ una única possibilitat, el nombre 1500.

En total, doncs, 14 possibilitats.

Segon de batxillerat

9. En Miquel ha inventat una nova operació entre nombres reals, anomenada "$\diamond$", definida així: $x \diamond y = y - x$. Si a, b i c compleixen que $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$, quina de les relacions següents és necessàriament certa?

A) $a = b$ B) $b = c$ C) $a = c$ D) $a = 0$ E) $c = 0$

Resposta: $a = 0$.

Si apliquem la definició de l'operació a cada banda de la igualtat obtenim

$$(a \diamond b) \diamond c = c - (a \diamond b) = c - (b - a) = c - b + a \quad \text{i} \quad a \diamond (b \diamond c) = (b \diamond c) - a = c - b - a.$$

Si aquestes dues expressions han de ser iguals resulta $c - b + a = c - b - a \Longrightarrow a = -a$, d'on $a = 0$.

Dit d'una altra manera, l'operació només compleix la propietat associativa si el primer element és 0.

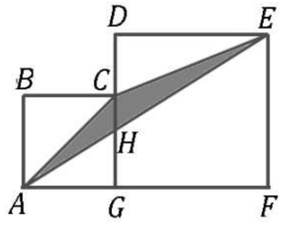
10. Quants dels nombres enters entre 2^{10} i 2^{13}, ambdós inclosos, són divisibles per 2^{10}?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

Resposta: 8.

Observem que $2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10}$ i per tant els múltiples de 2^{10} més petits o iguals que 2^{13} són els vuit primers: $\{1\cdot 2^{10}, 2\cdot 2^{10}, 3\cdot 2^{10}, ..., 8\cdot 2^{10}\}$.

18. En la figura es mostren dos quadrats adjacents amb costats de longituds a i b $(a < b)$. Quina és l'àrea del triangle ombrejat?



A) $\sqrt{ab}$ B) $\dfrac{1}{2}a^2$ C) $\dfrac{1}{2}b^2$ D) $\dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$ E) $\dfrac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$

Resposta: $\dfrac{a^2}{2}$.

En el problema 27 de quart teniu un camí de solució per a una situació numèrica concreta d'aquest problema. Us animem perquè ho generalitzeu. Tot seguit teniu una altra manera d'arribar a la solució general.

Tal com hem indicat els punts a la figura de l'enunciat (que en el concurs es donava sense noms per als punts) es tracta de restar a la suma de les àrees dels dos quadrats $ABCG$ i $GCEF$ (és a dir a^2+b^2) la suma de les àrees dels triangles rectangles ABC (que és la meitat de l'àrea del quadrat petit), AEF (que té de catets $b-a$ i b) i CDE (que té de catets $a+b$ i b). Això és $a^2+b^2-(\frac{a^2}{2}+\frac{b\cdot(b-a)}{2}+\frac{b\cdot(b+a)}{2})=\frac{a^2}{2}$.

Com a alternativa, si coneixeu la manera de calcular l'àrea d'un triangle per un determinant, us proposem que poseu uns eixos de coordenades amb origen en H, eix d'abscisses AF i eix d'ordenades HD i veureu que cal calcular la meitat del valor absolut del determinant $\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ b & b & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2$.

22. Quin és el conjunt de tots els valors del paràmetre a pels quals l'equació $2-|x|=ax$ té exactament dues solucions?

A) $-\infty < a \le -1$ B) $-1 < a < 1$ C) $1 \le a < +\infty$ D) $a=0$ E) $a=-1$ o $a=1$

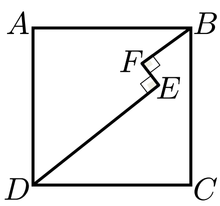
Resposta: $-1<a<1$.

Atenent a la definició del valor absolut cal distingir si $x>0$ o bé $x<0$.

En el primer cas tenim $2-x=ax \Longrightarrow x=\frac{2}{a+1}$, solució que només serà vàlida si $a>-1$, perquè x ha de ser positiva. De la mateixa manera, si $x<0$ l'equació queda $2+x=ax \Longrightarrow x=\frac{2}{a-1}$, i com que x ha de ser negativa això només ens dóna una solució si $a<1$.

L'equació tindrà doncs dues solucions, una per $x>0$ i l'altra per $x<0$, només si es compleixen les dues condicions alhora, és a dir si $-1<a<1$.

27. Un camí $DEFB$ amb $DE \perp EF$ i també $EF \perp FB$ es troba a l'interior del quadrat $ABCD$, com es mostra a la figura. Si $DE=5$, $EF=1$ i $FB=2$, quina és la longitud del costat del quadrat?

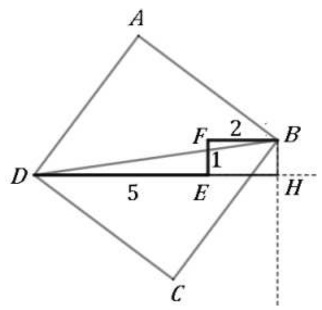


A) $3\sqrt{2}$ B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{11}{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 5

Resposta: 5.

Tracem paral·leles a FB per E i a FE per B. Aquestes dues rectes es tallen en un punt H i així es forma el rectangle $EHBF$. Tenim que $DH=DE+EH=5+2=7$ i $BH=FE=1$.

Si ara apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle DHB trobem que DB, que és la diagonal del quadrat, mesura $DB=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$. Coneguda la diagonal, també per Pitàgores podem trobar el costat del quadrat. L'apliquem al triangle rectangle isòsceles DAB, de catet el costat del quadrat, DA, i resulta $2\cdot DA^2=DB^2$ i per tant $DA=\sqrt{25}=5$.



28. La successió $a_1, a_2, a_3, \ldots$ comença amb $a_1=49$. Per $n\ge 1$, el nombre a_{n+1} s'obté afegint 1 a la suma de les xifres de a_n i aleshores fent el quadrat del resultat. Per tant, $a_2=(4+9+1)^2=196$. Determineu a_{2019}.

A) 121 B) 25 C) 64 D) 400 E) 49

Resposta: 64.

Calculem els primers termes de la successió:

$a_1=49$, $a_2=196$, $a_3=(1+9+6+1)^2=289$, $a_4=(2+8+9+1)^2=400$, $a_5=25$, $a_6=64$, $a_7=121$ i com que $a_8=25$ serà $a_9=64$, $a_{10}=121$ i, per tant, a partir d'a_5 els termes es repeteixen de tres en tres, 25, 64, 121.

En la llista de termes “repetits de tres en tres” hem de comptar $2019-4=2015$ termes i com que $2015=3\cdot 671+2$ això ens diu que a_{2019} és 64.

Cangur 2019. Societat Catalana de Matemàtiques

Amb el suport institucional de

Institut d'Estudis Catalans

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació

Amb una subvenció de

Fundació Privada CELLEX entitat impulsora de les CiMs + CELLEX Beques Batxillerat Internacional www.cims-cellex.cat

Amb la col·laboració de

ONCE

Universitat de Barcelona

UAB Universitat Autònoma de Barcelona

Universitat Politècnica de Catalunya BarcelonaTech

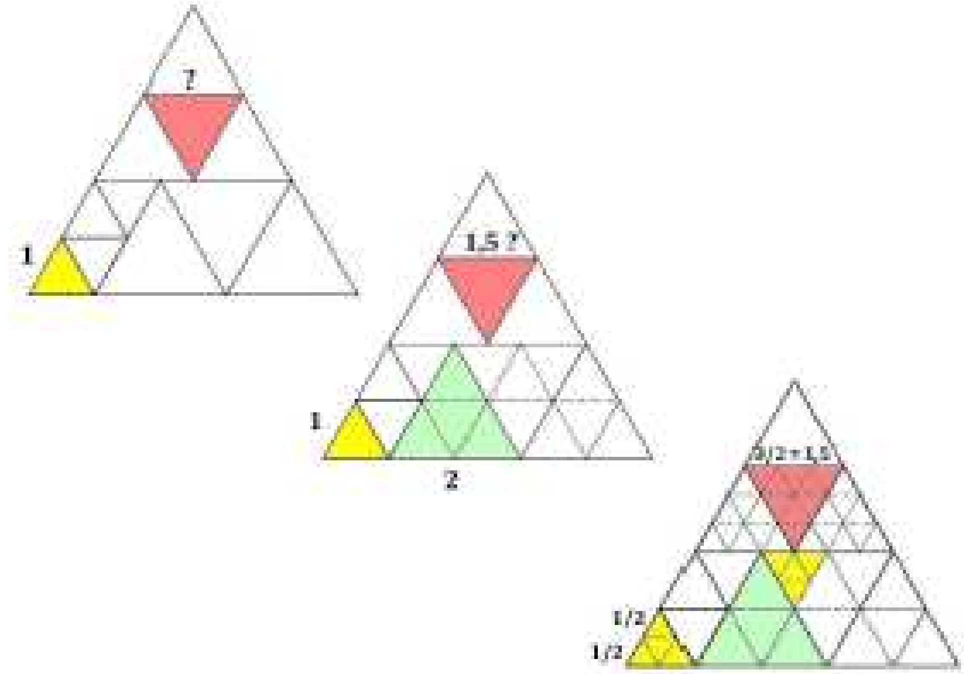
upf. Universitat Pompeu Fabra Barcelona

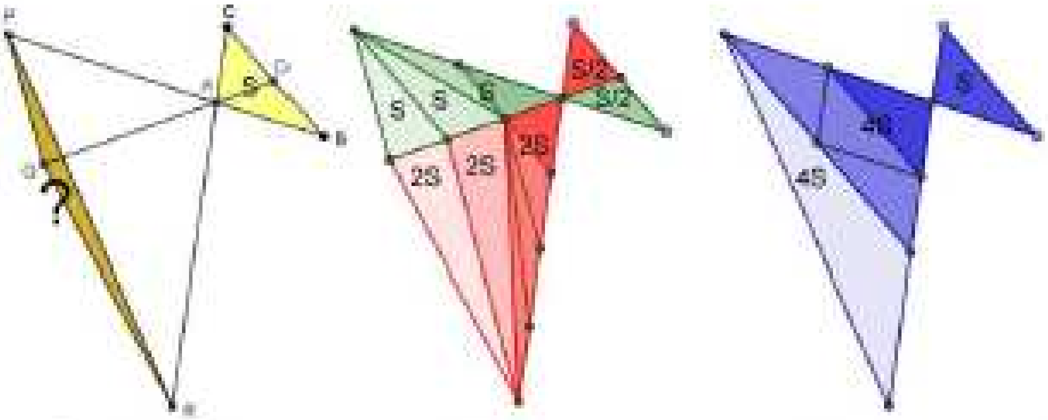
UVIC Universitat de Vic Universitat Central de Catalunya

Universitat de Girona

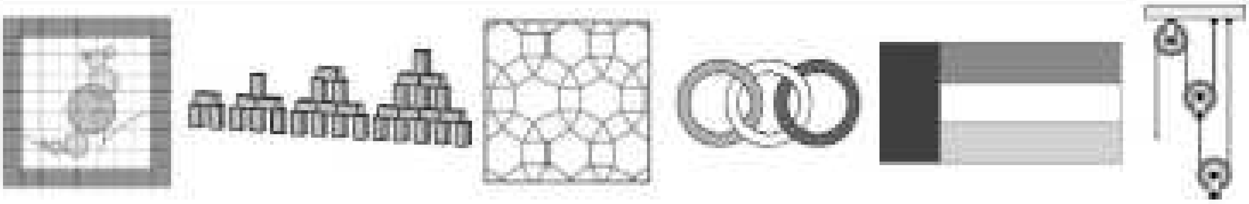
Universitat de Lleida

Universitat Rovira i Virgili





Àrea(PQR) = 9S − 8S = S



Una publicació de la Comissió Cangur de la Societat Catalana de Matemàtiques.
Maig de 2019