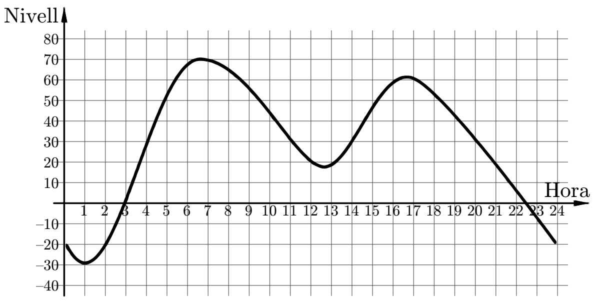
XVII Cangur SCM Nivell 4

Enunciats (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A Venècia, a causa de la marea, el nivell de l'aigua varia durant el dia, pujant i baixant. Al gràfic es pot veure el nivell de l'aigua (respecte d'un cert nivell 0) al llarg del dia 6 de maig de 2011. Durant quantes hores el nivell de l'aigua va estar per sobre de 30 cm?



A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 13

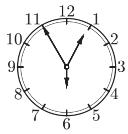
2. Quants zeros hi ha al final del número $2^{22}\ 3^{33}\ 5^{55}\ 7^{77}$?

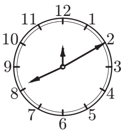
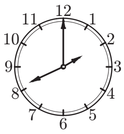
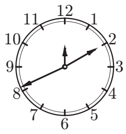
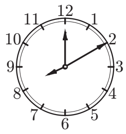
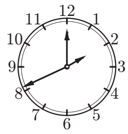
A) 22 B) 33 C) 55 D) 77 E) No n'hi ha cap.

3. En una llista de cinc nombres, el primer és 2 i l'últim és 12. El producte dels tres primers és 30, el producte dels tres del mig és 90 i el producte dels tres darrers és 360. Quin nombre hi ha al centre de la llista?

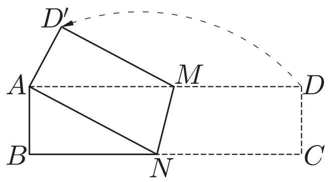
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 10

4. Un rellotge té tres busques de longituds diferents, per a les hores, els minuts i els segons. No sabem què senyala cada busca, però sabem que el rellotge funciona bé. A les 12:55:30 les busques eren a la posició que es veu a la dreta. En quina posició estaran les busques a les 8:10:00?



A)  B)  C)  D)  E) 

5. Un rectangle de paper $ABCD$ de 4 cm $\times$ 16 cm es doblega sobre la línia MN, de manera que el vèrtex C coincideix amb el vèrtex A, com es veu al dibuix. Quina és l'àrea del quadrilàter $ANMD'$?



A) 28 cm^2 B) 30 cm^2 C) 32 cm^2 D) 48 cm^2 E) 56 cm^2

6. Si sumem les xifres d'un nombre de nou xifres dóna 8. Quant donarà el producte d'aquestes nou xifres?

A) 0 B) 1 C) 8 D) 9 E) 9!

7. El valor més gran de n, enter i positiu, que satisfà la desigualtat $n^{200} < 5^{300}$ és:

A) 5 B) 6 C) 8 D) 11 E) 12

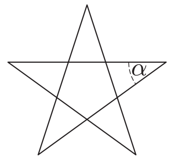
8. Quina de les funcions següents satisfà la condició $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$, per a tot $x \neq 0$?

A) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ B) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ C) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
D) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ E) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

9. Un nombre real x satisfà les desigualtats $x^3 < 64 < x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$
D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

10. Quant mesura l'angle α de l'estrella regular de cinc puntes de la figura?



A) $24°$ B) $30°$ C) $36°$ D) 45 E) $72°$

Qüestions de 4 punts

11. La meva edat és un nombre de dues xifres potència de 5, i la del meu veí és un nombre també de dues xifres però potència de 2. La suma de les quatre xifres de les nostres edats és un nombre senar. Quin és el producte d'aquestes quatre xifres?

A) 240 B) 2010 C) 60 D) 50 E) 300

12. Durant un creuer pel Mediterrani s'organitzen quatre visites opcionals, i a cadascuna de les sortides hi va un 80 % dels passatgers. Quin és el percentatge més petit possible de passatgers que ha anat a totes les sortides?

A) 80 % B) 60 % C) 40 % D) 20 % E) 16 %

13. El conjunt de solucions de la inequació $|x| + |x - 3| > 3$ és:

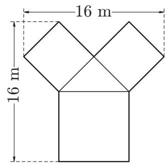
A) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ B) $(-3, 3)$ C) $(-\infty, -3)$ D) $(-3, +\infty)$

E) Tots els nombres reals

14. A les escoles d'Eslovàquia es puntuen les activitats dels alumnes de l'1 al 5, on l'1 és la millor qualificació i 5 és la pitjor. En una d'aquestes escoles una prova no ha anat gaire bé i la mitjana ha estat de 4. Els nois tenen una mitjana de 3,6 i les noies una mitjana de 4,2. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) Hi ha el doble de nois que de noies.
B) Hi ha quatre vegades més nois que noies.
C) Hi ha el doble de noies que de nois.
D) Hi ha quatre vegades més noies que nois.
E) Hi ha tants nois com noies.

15. Al dibuix es pot veure l'esquema d'un jardí. Als quadrats iguals s'ha plantat roses blanques, i al quadrat gran, roses vermelles. Al triangle rectangle que es veu al dibuix s'ha plantat roses grogues. Quina àrea té la regió plantada de roses?

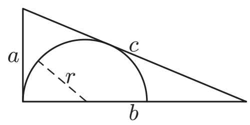


A) 114 m^2 B) 130 m^2 C) 144 m^2 D) 160 m^2 E) 186 m^2

16. El caixer d'un cinema ha venut totes les entrades de la primera fila, nume rades consecutivament a partir de l'1. Per equivocació, ha venut una mateixa entrada dos cops. La suma dels nombres de les entrades venudes és 857. Quina és l'entrada que ha venut dos cops?

A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

17. Tenim un triangle rectangle de costats a, b i c. El radi del semicercle inscrit que es veu al dibuix és:

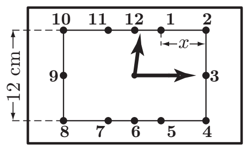


A) $\dfrac{a(c-a)}{2b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b+c}$ C) $\dfrac{ab}{b+c}$ D) $\dfrac{2ab}{a+b+c}$ E) $\dfrac{ab}{a+c}$

18. Els costats d'un quadrat $ABCD$ fan 2 m. E i F són els punts mitjans dels segments AB i AD, respectivament. G és un punt sobre el segment CF, de manera que $3CG = 2GF$. L'àrea del triangle BEG és:

A) $\dfrac{7}{10}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) $\dfrac{8}{5}$ D) $\dfrac{3}{5}$ E) $\dfrac{6}{5}$

19. Un rellotge de paret és rectangular, com es veu al dibuix. Quina és, en centímetres, la distància x entre les posicions del número 1 i el número 2 si la distància entre el 8 i el 10 és de 12 cm?



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $12-3\sqrt{3}$

20. Un cangur ha fet una fila de daus (dels estàndard, on cada parell de cares oposades suma 7), enganxant un dau amb el següent, de manera que les cares que s'uneixen tenen la mateixa puntuació. Quants daus necessitarà per a fer una fila on la suma de les cares que no estan enganxades sigui 2012?

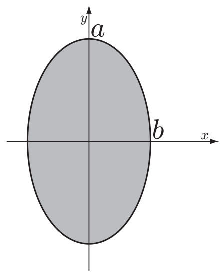
A) 70 B) 71 C) 142 D) 143 E) És impossible que sumin 2012.

Qüestions de 5 punts

21. Alguns triangles isòsceles tenen la propietat que una mitjana els divideix en dos triangles que també són isòsceles. Quin és l'angle més petit que pot tenir un triangle amb aquesta propietat?

A) 15° B) 22,5° C) 30° D) 36° E) 45°

22. En l'el·lipse del dibuix, $a > b$. Si la girem al voltant de l'eix x, obtenim l'el·lipsoide E_x, que té volum V_x, i si la rotem al voltant de l'eix y, obtenim l'el·lipsoide E_y, que té volum V_y. Quina de les afirmacions següents és correcta?

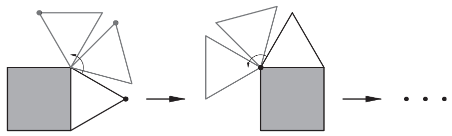


A) $E_x \neq E_y$ i $V_x > V_y$
B) $E_x = E_y$ però $V_x \neq V_y$
C) $E_x = E_y$ i $V_x = V_y$
D) $E_x \neq E_y$ i $V_x < V_y$
E) $E_x \neq E_y$ però $V_x = V_y$

23. En una fracció podem fer dos tipus d'operacions: 1) sumar 8 al numerador, 2) sumar 7 al denominador. Després de fer n operacions d'algun d'aquests dos tipus, la fracció 7/8 s'ha transformat en una fracció equivalent a 7/8 altra vegada. Quin és el mínim valor possible de n?

A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Això és impossible.

24. Un triangle equilàter es desplaça al voltant d'un quadrat de costat 1, com indica el dibuix. Quina és la llargada del camí que ha seguit el punt marcat fins que tant el triangle com el punt han arribat altra vegada a la posició de partida?



A) 4π B) $\frac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\frac{14}{3}\pi$ E) $\frac{21}{2}\pi$

25. Quantes permutacions (x_1, x_2, x_3, x_4) del conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$ tenen la propietat que la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ és divisible per 3?

A) 8 B) 12 C) 14 D) 16 E) 24

26. En acabar la classe de matemàtiques ha quedat dibuixada a la pissarra la paràbola $y = x^2$ i 2012 rectes paral·leles a la recta $y = x$, de manera que cadascuna d'elles talla la paràbola en dos punts. Quant val la suma dels valors de les abscisses x de tots aquests punts?

A) 0 B) 1 C) 1006 D) 2012 E) És impossible de determinar.

27. Tres vèrtexs d'un cub, no tots de la mateixa cara, són $P = (3, 4, 1)$, $Q = (5, 2, 9)$ i $R = (1, 6, 5)$. Quin punt és el centre del cub?

A) $A = (4, 3, 5)$ B) $B = (2, 5, 3)$ C) $C = (3, 4, 7)$
D) $D = (3, 4, 5)$ E) $E = (2, 3, 5)$

28. En la successió $1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1,\ \ldots$ els primers dos elements a_1 i a_2 són 1. El tercer element és la resta dels dos anteriors, $a_3 = a_1 - a_2$; el quart és la suma dels dos anteriors, $a_4 = a_2 + a_3$. Llavors $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$ i així successivament. Quant val la suma dels 100 primers elements d'aquesta successió?

A) 0 B) 3 C) -21 D) 100 E) -1

29. La Joana tria dos nombres a i b del conjunt $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$. El producte ab és el mateix que la suma dels altres 24 nombres. Quant val $|a - b|$?

A) 10 B) 9 C) 7 D) 2 E) 6

30. Cada gat del País de les Meravelles és savi o és boig. Si en una habitació coincideixen tres gats bojos i un gat savi, aquest es torna boig. Si en una habitació coincideixen un gat boig i tres gats savis, aquests descobreixen que l'altre és boig. Tres gats van entrar, l'un darrera l'altre, en una habitació buida. A continuació va entrar-hi un quart gat i una mica després el primer en va sortir. Després va entrar un cinquè gat a l'habitació i al cap de poc en va sortir el segon; i així successivament. Tot i que per l'habitació ja havien passat alguns gats bojos, va ser en el moment que va entrar el 2012è gat quan per primer cop es va descobrir un gat boig. Quins d'aquests gats podrien ser bojos quan van entrar a l'habitació?

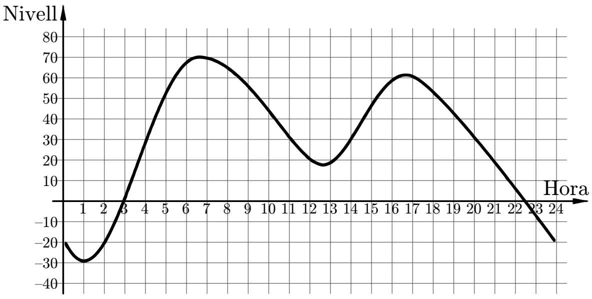
A) El 1r i el 2011è
B) El 2n i el 2010è
C) El 3r i el 2009è
D) El 4t i l'últim
E) El 2n i el 2011è

XVII Cangur SCM Nivell 4

Enunciats (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A Venècia, a causa de la marea, el nivell de l'aigua varia durant el dia, pujant i baixant. Al gràfic es pot veure el nivell de l'aigua (respecte d'un cert nivell 0) al llarg del dia 6 de maig de 2011. Durant quantes hores el nivell de l'aigua va estar per sobre de 30 cm?



A) 13 B) 9 C) 7 D) 6 E) 5

1

---

2. $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ és igual a

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[6]{9}$ D) $\sqrt[3]{9}$ E) 3

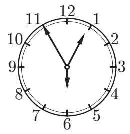
---

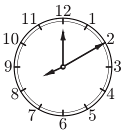
3. En una llista de nombres, el primer nombre és 3 i el darrer és 15. El producte dels tres primers és 54, el producte dels tres del mig és 90 i el producte dels tres darrers és 225. Quin nombre hi ha al mig de la llista?

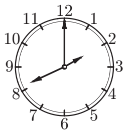
3				15

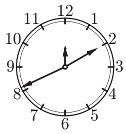
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

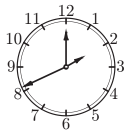
4. Un rellotge té 3 agulles de diferents longituds (per a les hores, minuts i segons). No sabem què senyala cada agulla, però sabem que el rellotge funciona bé. A les 12:55:30 les agulles eren a la posició que es veu a la dreta. En quina posició estaran les agulles a les 8:10:00?

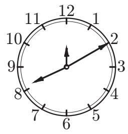


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

---

5. De quantes maneres diferents pot ser dividit el conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en dos subconjunts, de manera que la suma dels elements d'aquests dos subconjunts siga la mateixa?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

---

6. Si sumem les xifres d'un nombre de vuit xifres dóna 7. Quant donarà el producte d'estes vuit xifres?

A) 8 B) 7 C) 1 D) 0 E) 8!

---

7. Quants zeros hi ha al final del número $2^{12}\ 3^{13}\ 5^{15}\ 7^{17}$?

A) 12 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

---

8. Quina de les funcions següents compleix l'equació $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$?

A) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ B) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ C) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

D) $f(x) = 2 + \frac{2}{x^2}$ E) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

---

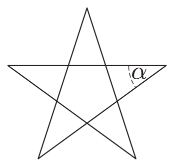
9. Un determinat nombre real x satisfà la desigualtat $x^3 < 64 < x^2$. Quina de les afirmacions següents és certa?

A) $0 < x < 64$ B) $-8 < x < 4$ C) $x > 8$

D) $-4 < x < 8$ E) $x < -8$

---

10. Quant mesura l'angle α de l'estrella regular de cinc puntes de la figura?



A) 30° B) 36° C) 72° D) 45° E) 24°

Qüestions de 4 punts

11. La meva edat és un nombre de dues xifres potència de 5, i la del meu veí, un nombre també de dues xifres però potència de 2. La suma de les quatre xifres de les nostres edats és un nombre senar. Quin és el producte d'aquestes quatre xifres?

A) 2.010 B) 300 C) 240 D) 60 E) 50

12. Durant un creuer pel Mediterrani s'organitzen quatre visites opcionals, i a cadascuna de les sortides hi va un 80% dels passatgers. Quin és el percentatge més petit possible de passatgers que ha anat a totes les sortides?

A) 16% B) 20% C) 40% D) 60% E) 80%

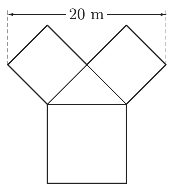
13. El conjunt de solucions de la inequació $|x| + |x - 5| > 5$ és:

A) Tots els nombres reals B) $(-5, 5)$ C) $(-\infty, -5)$ D) $(5, +\infty)$
E) $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

14. La nota mitjana d'un examen a una classe de segon de batxillerat ha estat de 8. Les xiques han tret de mitjana un 8,2 i els xics un 7,6. Quina de les frases següents és correcta?

A) Hi ha el triple de xics que de xiques.
B) Hi ha el doble de xics que de xiques.
C) Hi ha el triple de xiques que de xics.
D) Hi ha el doble de xiques que de xics.
E) Hi ha tantes xiques com xics.

15. En el dibuix es pot veure l'esquema d'un jardí. En els quadrats iguals, s'hi han plantat roses blanques, i en el quadrat gran, roses roges. En el triangle rectangle que es veu en el dibuix, s'hi han plantat roses grogues. A partir de la distància coneguda, marcada en la la figura, calculeu quant mesura l'àrea total plantada de roses.

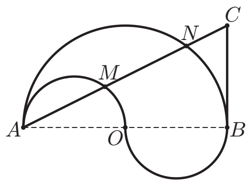


A) 100 m^2 B) 225 m^2 C) 275 m^2 D) 250 m^2 E) 150 m^2

16. El caixer d'un cinema ha venut totes les entrades de la primera fila, numerades consecutivament a partir de l'1. Per equivocació, ha venut una mateixa entrada dos cops. La suma dels nombres de les entrades venudes, inclosa la repetida, és 845. Quina és l'entrada que ha venut dos cops?

A) 4 B) 16 C) 25 D) 37 E) 42

17. La caputxeta vermella, A, es disposa a visitar la seua iaia, B. En els punts on els camins s'encreuen, pot canviar de camí. Empreu el diagrama per ajudar-la a trobar el camí més curt. (Noteu que AO és el radi del cercle major, $AO = CB = 1$ i CB és perpendicular a AB).

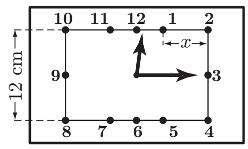


A) Arc ANB
B) Arc AO més arc OB
C) Segment AC més segment CB
D) Segment AN més arc NB
E) Segment AM més arc MO més arc OB

18. Els costats d'un quadrat $ABCD$ mesuren 2 m. E i F són els punts mitjans dels segments AB i AD respectivament. G és un punt sobre el segment CF, de manera que $3CG = 2GF$. L'àrea del triangle BEG és:

A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{6}{5}$

19. Un rellotge de paret és rectangular, com es veu en el dibuix. Quina és la distància x entre les posicions del número 1 i el número 2 si la distància entre el 8 i el 10 és de 12 cm?



A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2+\sqrt{3}$ E) $12-3\sqrt{3}$

20. Quins dels punts següents de la forma (x, y) pertanyen a la gràfica de la funció lineal $y = bx + 1$ si b és qualsevol nombre real diferent de 0?

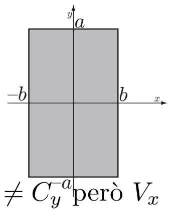
A) $(0,1)$ i $(\frac{1}{b},0)$ B) $(0,b)$ i $(-\frac{1}{b},0)$ C) $(0,1)$ i $(b,0)$
D) $(0,1)$ i $(-\frac{1}{b},0)$ E) $(0,-\frac{1}{b})$ i $(1,0)$

Qüestions de 5 punts

21. Mariola busca els nombres de la sort entre els nombres de dues xifres. Multiplica els dígits un per l'altre i si el resultat encara té 2 xifres els torna a multiplicar. Repeteix açò fins que obté un nombre d'una sola xifra. Els nombres de la sort són aquells que donen zero com a resultat. Quants són els nombres de la sort de Mariola?

A) 9 B) 17 C) 20 D) 24 E) 27

22. En la figura es mostra un rectangle amb $a > b$. Si girem el rectangle al voltant de l'eix X, obtenim el cilindre C_x de volum V_x. Si el girem al voltant de l'eix Y, obtenim el cilindre C_y de volum V_y. Quina de les afirmacions següents és vertadera?

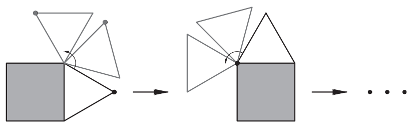


A) $C_x \neq C_y$ i $V_x < V_y$ B) $C_x \neq C_y$ i $V_x > V_y$ C) $C_x \neq C_y$ però $V_x = V_y$
D) $C_x = C_y$ i $V_x = V_y$ E) $C_x = C_y$ però $V_x \neq V_y$

23. En una fracció es fan dos tipus d'operacions: 1) sumar 8 al numerador, 2) sumar 7 al denominador. Després de fer n operacions d'algun d'aquests dos tipus, la fracció 7/8 s'ha transformat en una fracció equivalent altra vegada a 7/8. Quin és el mínim valor possible de n?

A) 56 B) 81 C) 109 D) 113 E) Això és impossible.

24. Un triangle equilàter es desplaça al voltant d'un quadrat de costat 1, com indica el dibuix. Quina és la llargada del camí que ha seguit el punt marcat fins que tant el triangle com el punt han arribat altra vegada a la posició de partida?

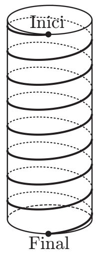


A) 4π B) $\dfrac{28}{3}\pi$ C) 8π D) $\dfrac{14}{3}\pi$ E) $\dfrac{21}{2}\pi$

25. En acabar la classe de matemàtiques ha quedat dibuixada en la pissarra la paràbola $y = x^2$ i 2012 rectes paral·leles a la recta $y = x$, de manera que cadascuna d'elles talla la paràbola en dos punts. Quant sumen els valors de les coordenades x de tots aquests punts?

A) 0 B) 1 C) 1.006 D) 2.012 E) No es pot determinar.

26. En l'exuberant corona d'un vell arbre amb una circumferència d'1 m, una família d'esquirols té el seu niu a 15 m sobre el terra. Avui Joanet, l'esquirol més jovenet, fa pràctiques per a arribar al terra corrent pel tronc. Les instruccions del seu pare són: «Exercici 1: sempre amb el mateix angle respecte del terra, 8 voltes al voltant del tronc, velocitat constant», mentre li mostra a Joanet el dibuix de la dreta. A Joanet aquest camí li sembla molt més llarg que córrer cap avall del tronc verticalment. Quants metres més fa de llarg?



A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 5 m

27. El producte P de tots els divisors d'un nombre N (inclosos l'1 i l'N) acaba exactament en 36 zeros. Quin és el nombre màxim de zeros amb què pot acabar el nombre N?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) Un nombre parell, més gran que 2

Nota: versió modificada per evitar possibles duplicitats que es donaven en la interpretació de l'enunciat, cosa que va fer anul·lar el problema en el Cangur del dia 22 de març.

28. Quantes solucions té el sistema d'equacions següent?

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

A) Cap B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

29. Ariadna tria dos nombres a i b del conjunt $\{1, 2, \ldots, 17\}$. El producte ab és igual que la suma dels 15 nombres restants. Quin és el valor de $|a - b|$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

30. Cada gat del País de les Meravelles és savi o és boig. Si en una habitació coincideixen tres gats bojos i un gat savi, aquest es torna boig. Si en una habitació coincideixen un gat boig i tres gats savis, els savis descobreixen que l'altre és boig. Tres gats entren, l'un darrere l'altre, en una habitació buida. A continuació hi entra un quart gat, i una mica més tard el primer en surt. Després entra un cinquè gat a l'habitació i, al cap de poc, en surt el segon; i així successivament. Tot i que per l'habitació ja han passat alguns gats bojos, en el moment en què entra el 2012è gat és quan es descobreix per primer cop un gat boig. Quins d'aquests gats poden ser bojos quan entren a l'habitació?

A) El 1r i el 2011è B) El 2n i el 2011è C) El 3r i el 2009è
D) El 2n i el 2010è E) El 4t i l'últim

Premis. Balears

Primer premi
Ramón Moreno Macarrilla (IES Madina Mayurqa, Palma), 100 punts
Segon premi
Enric Alcover Comas (IES Madina Mayurqa, Palma), 96 punts
Tercer premi
Andreu Cabrer Company (La Salle, Palma), 88 punts
Altres premis
Albert Marqués Triay (IES Maria Àngels Cardona, Ciutadella), 85 punts
ex aequo Feng Ma (IES Ses Estacions, Palma) i
Feliu Serra Burriel (IES Madina Mayurqa, Palma), 83 punts
Juan José Garau Luis (IES Joan Alcover, Palma), 80,25 punts
ex aequo Simon Abellan Cardona (IES Joan Ramis i Ramis, Maó) i
Enchong Liu (IES Ses Estacions, Palma), 80 punts
Antonio López-Mateos Chico (Ntra. Sra. de Montesión, Palma), 78,5 punts

Premis. País Valencià

Primer premi
David Pardo Simón (IES Thader, Orihuela), 117.25 punts
Segon premi
Roberto Alegre Usach (IES La Serrania, Villar del Arzobispo), 107.5 punts
Tercer premi
Óscar Roldán Blay (IES Fancesc Ferrer i Guàrdia, València), 107 punts
Altres premis
José Israel Sánchez García (IES A. Navarro Santafé, Villena), 105 punts
Celia Traver Abella (IES Ramon Cid, Benicarló), 103 punts
Jorge Pallarés Soler (IES Ximen d'Urrea, L'Alcora), 97.5 punts
ex aequo, Iamil Ferrer Pomer (IES La Plana, Castelló de la Plana) i
Nicolás Blasco Arnanz (IES Vicent Sos Baynat, Castelló P.), 97 punts
Jesús Hernández Escavy (M. Vedruna Sdo. Corazón, Castelló P.), 95.5 punts
Jaime Ferrer Velasco (IES Vicent Sos Baynat, Castelló P.), 95.25 punts

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi
Darío Nieuwenhuis Nivela (Aula Escuela Europea, Barcelona), 124,75 punts

Premis per al pòdium
Jaume De Dios Pont (Tecnos, Terrassa), 121,25 punts
Joan Prunera Olivé (Institut Escola Industrial, Sabadell), 107 punts

Premis de categoria A
ex aequo Victor Ortiga Villagrasa (Institut Torre del Palau, Terrassa) i
Harold Sagel (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 101,25 punts

Premis de categoria B
Gerard Moreno Giménez (Institut Martí l'Humà, Montblanc), 101 punts
Joan Roca Carreras (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 100,75 punts
Arnau Martínez Escubedo (Sant Jaume de la FEP, L'Hospitalet), 100 punts

Premis de categoria C
Marc Sánchez Alfonso (Sant Ignasi, Barcelona), 99,5 punts
Eric Milesi Vidal (Pare Manyanet, Barcelona), 99,25 punts
Xavier Cabanes Bosacoma (Institut Maragall, Barcelona), 98,5 punts

Premis de categoria D
Aitor Azemar Carnicero (Institut Arnau Cadell, Sant Cugat), 97,5 punts
ex aequo Jordi Barceló Mercader (Jesús Maria, Barcelona) i
Francesc Xavier Gispert Sánchez (Montessori-Palau, Girona), 96,25 punts

---

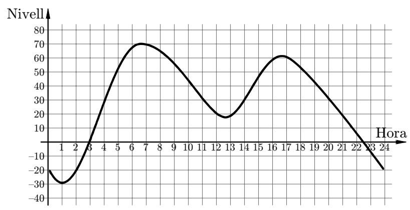
Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions
Jordi Font Reverter (Escola Pia Balmes, Barcelona), 96 punts
Arnau Sistach Reinosa (Institut Cap Norfeu, Roses), 95,75 punts
Lluís Isern López (Institut Gabriel Ferrater i Soler, Reus), 94,5 punts
Atao Eduardo Adamo Salazar (Sagrado Corazón de Jesús, Terrassa), 94 punts
Gabriel Comerón Castillo (Institut d'Argentona, Argentona), 93,75 punts
Júlia Alsina Oriol (Institut Jaume Callís, Vic), 93,5 punts
Anna Pujol Coma (Institut Giola, Llinars del Vallès), 92,75 punts
Guillem Córdoba Perarnau (Escola Pia de Granollers, Granollers), 91,5 punts
Eudald Romo Grau (Institut Jaume Vicens Vives, Girona), 91 punts
David Masip Bonet (Institut Pons d'Icart, Tarragona), 90,25 punts
Marc Ballbé Ferrero (Aula Escuela Europea, Barcelona), 89,75 punts
Enric Domingo Domènech (Institut Baix Penedès, El Vendrell) i
Celia Franch López (Aula Escuela Europea, Barcelona), 89 punts

XVII Cangur SCM Nivell 4

Solucions (15 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. E. 13 hores.



Al gràfic s'observa que el nivell de l'aigua supera els 30 cm entre les 4 hores i les 10 hores i entre les 14 hores i les 20 hores. En total, 13 hores.

2. A. 22.

Els 0 al final d'un nombre només poden venir de multiplicar el mateix nombre de 2 i 5. Observem que $2^{22} \cdot 3^{33} \cdot 5^{55} \cdot 7^{77} = 2^{22} \cdot 5^{22} \cdot 5^{33} \cdot 3^{33} \cdot 7^{77}$ i això és $10^{22} \cdot 5^{33} \cdot 3^{33} \cdot 7^{77}$ i per tant el nombre de l'enunciat acaba en 22 zeros.

3. C. 5.

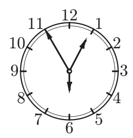
La taula següent correspon a l'enunciat:

2	x	y	z	12

Tenim que $2xy = 30$ i, per tant $xy = 15$.
Com que $xyz = 90$ ha de ser $z = 6$
Finalment 12yz=360 i, per tant $y = \dfrac{260}{12z} = 5$.

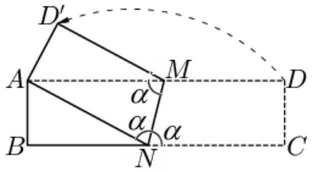
4. A.

Si mirem amb atenció la figura donada veurem que la busca dels segons és la més curta, la dels minuts la més llarga i la de les hores és la mitjana. Per això a les 8:10:00 el rellotge marcarà el que s'indica a la solució A.



5. C. 32 cm^2.

Veurem que l'àrea del quadrilàter $ANMD'$ és justament la meitat de l'àrea del rectangle donat, és a dir $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 16 = 32$ cm^2.



Els dos angles α assenyalats amb vèrtex a M són iguals per la simetria que genera el doblec. L'angle α assenyalat amb vèrtex a M és igual a un dels dos anteriors per alterns interns entre les paral·leles AD i BC tallades per la secant MBN. Per tant el triangle AMN és isòsceles i $AM = AN$ i com que $AN = NC$ pel doblec serà $AM = NC$ i, per tant $BN = MD$. Això ens diu que el quadrilàter $MNCD$ divideix en dues parts iguals el rectangle. Com que pel doblec els quadrilàters $MNCD$ i $MNAD'$ són iguals, això acaba el problema.

6. A. 0.

Si sumem les xifres d'un nombre de nou xifres i dóna 8 és que forçosament alguna de les xifres és 0.

7. D. 11.

Volem que es compleixi $n^{200} < 5^{300} = 5^{200} \cdot 5^{100}$. Podem escriure-ho $\left(\left(\frac{n}{5}\right)^2\right)^1 00 < 5^{100}$. La condició donada, doncs, equival a $\left(\frac{n}{5}\right)^2 < 5$.
Si fem els càlculs corresponents veurem que $(\frac{11}{5})^2 = \frac{121}{25} < 5$ però $(\frac{12}{5})^2 = \frac{144}{25} > 5$. Per tant la solució és 11.

8. D. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Els resultats de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i $\frac{1}{f(x)}$ per a les funcions donades a les opcions de resposta són, respectivament:

- Opció A: $2x$ i $\dfrac{x}{2}$
- Opció B: $\dfrac{x}{x+1}$ i $x+1$.
- Opció C: $x+1$ i $\dfrac{x}{x+1}$.
- Opció D: x i x.
- Opció E: $\dfrac{x^2+1}{x}$ i $\dfrac{x}{x^2+1}$.

9. E. $x < -8$.

Com que $64 < x^2$ tenim que $x < -8$ o bé $x > 8$. Tenim també que $x^3 < 64$, per tant el cas $x > 8$ no és possible i aleshores $x^3 < 64 < x^2$ té com a solució el conjunt de tots els valors de x que compleixen $x < -8$.

10. C. 36°.

Els angles del pentàgon regular central són de 108°. Per tant cadascun dels angles en la base dels triangles isòsceles que són les puntes de l'estrella són de 72°. L'angle demanat serà de $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Qüestions de 4 punts

11. A. 240.

Si la meva edat és una potència de 2 de dues xifres, ha de ser 25. L'edat del meu cosí és una potència de 2 de dues xifres; per tant només pot ser 16, 32 o 64 anys. Com que la suma de les quatre xifres ha de ser senar, això només ho compleix el 64 i el producte de les quatre xifres és $2 \times 5 \times 6 \times 4 = 240$.

12. D. 20 %.

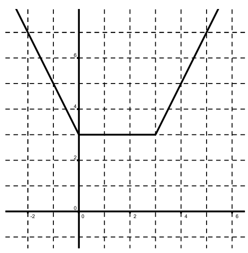
La intersecció mínima de 4 subconjunts amb el 80 % d'elements en cada un d'ells, o sigui, excloent un 20 % cada vegada, arriba a excloure un màxim de $4 \times 20 = 80\,\%$. La resta, un 20 %, són els que han anat a totes.

13. A. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Analitzem la funció $f(x) = |x| + |x-3|$. Es compleix que:

$$f(x) = |x| + |x-3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 2x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

i la gràfica n'és la de la dreta. S'observa clarament que $|x| + |x-3| > 3$ si i només si $x > 3$ o bé $x < 0$.

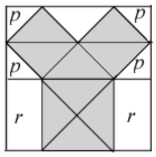


14. C. Hi ha el doble de noies que de nois..

Si n és el número de nois, amb mitjana x i m el de noies, amb mitjana y, el total de punt sumant les notes de tota la classe és $n \cdot x + m \cdot y$.
La mitjana global es pot obtenir dividint el total de punts pel total d'alumnes, és a dir $\dfrac{n \cdot x + m \cdot y}{n+m}$.
En aquest cas serà $\dfrac{3{,}6 \cdot n + 4,2 \cdot m}{n+m} = 4$ que ens duu a $3{,}6 \cdot n + 4{,}2 \cdot m = 4 \cdot (n+m)$, o, sumant termes semblants $0{,}4 \cdot n = 0{,}2 \cdot m$ o, el que és el mateix $2n = m$: hi ha el doble de noies que de nois.

15. C. 144 m^2.

La figura mostra que el terreny plantat de roses es pot dividir en 9 triangles rectangles isòsceles iguals (ombrejats). Per altra banda el quadrat de 16×16 que envolta tot el terreny es completa amb un triangle blanc igual als anteriors, quatre triangles (p) que donen la mateixa àrea que dos dels anteriors, i dos rectangles (r) que donen la mateixa àrea que el quadrat que tenen adjunt és a dir, com quatre triangles ombrejats. Així veiem que l'àrea plantada de roses són les $\dfrac{9}{16}$ parts d'un quadrat de 16×16, és a dir $\dfrac{9}{16} \cdot 16^2 = 144$.

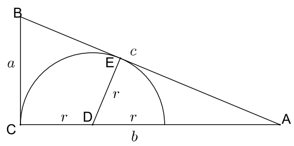


16. D. 37.

Mitjançant la fórmula de la suma dels n primers nombres naturals $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ podem ignorar l'entrada repetida i veure que 40 entrades sumarien 820 i si s'afegeix la següent ja sumaria 861, que és massa. Així, restant 820 a 857 obtenim 37, que és el número de l'entrada que s'ha venut dos cops.

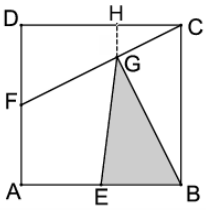
17. E. $\dfrac{ab}{a+c}$.

El triangle ACB és semblant al triangle AED. Per tant $\dfrac{ED}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ és a dir $\dfrac{r}{a} = \dfrac{b-r}{c}$ i si operem en aquesta igualtat i aïllem r trobem la solució indicada.



18. B. $\frac{4}{5}$.

Per calcular l'àrea del triangle BEG veiem que la base $EB = 1$ m i l'altura serà la distància del punt G al costat AB, que podem obtenir restant de 2 la distància de G al costat CD, representada a la figura com GH. Apliquem el teorema de Thales als triangles semblants CDF i CHG, i obtenim la proporció $\frac{GH}{DF} = \frac{CG}{CF}$.



Observem que per la construcció de G tenim

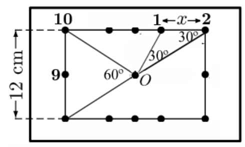
$$\frac{CG}{CF} = \frac{CG}{CG+GF} = \frac{CG}{CG+3\frac{CG}{2}} = \frac{2}{5}.$$

La proporció indicada i $DF = 1$ donen $GH =$distància$(C, CD) = \frac{2}{5}$.

Així àrea$(BEG) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-2/5) = \frac{4}{5}$ m^2.

19. C. $4\sqrt{3}$.

O serà el centre del rellotge i P_i el punt de l'hora **i**. Com que la velocitat angular de les agulles del rellotge és constant, l'angle P_8OP_{10} és de 60° i l'angle P_1OP_2 és de 30°. Vist que és isòsceles i té un angle de 60°, el triangle P_8OP_{10} és equilàter.



Tenim $OP_{10} = OP_2 = 12$. OP_2 és la base del triangle isòsceles $P_{10}OP_2$, en el qual els angles iguals són de 30° i els costats iguals fan x. Això ens permet raonar que $\cos 30° = \frac{\text{mitja base}}{x} = \frac{6}{x}$ i d'aquí $c = 4\sqrt{3}$

20. E. És impossible que sumin 2012.

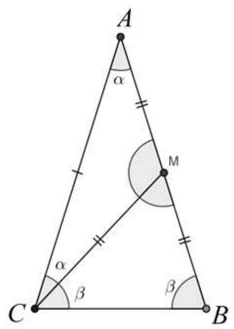
La suma de les cares que es veuen de n daus serà $14\cdot n+$ les dues cares extremes, perquè per cada dau s'han de sumar dues parelles de cares oposades. Dividint 2012 entre 14 ens dóna 143 de quocient i 10 de residu. La fila hauria de tenir 143 daus i faltarien 10 punts, que hauria de ser la suma de les cares extremes. Ara bé, així com estan aferrats els daus (per cares coincidents), si hi ha un nombre parell de daus les dues cares extremes assenyalen el mateix número i si hi ha un nombre imparell de daus (com és el cas) a les dues cares extremes veurem 2 cares oposades, que sumen 7 punts i no 10. No és possible que la suma sigui 2012.

Qüestions de 5 punts

21. E. $45°$.

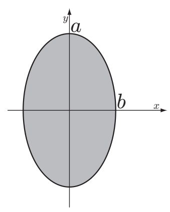
Indicarem el triangle isòsceles com ABC i imaginarem que l'angle diferent és el situat en A. Si pensem que la mitjana que va des de A fins al costat desigual és la que fa que es compleix l'enunciat, obtindríem dos triangles rectangles, que només poden ser isòsceles si els angles són $90°$, $45°$ i $45°$.
No hi ha cap altre triangle que compleixi l'enunciat.

Imaginem que la mitjana que interessa fos la que va des d'un altre vèrtex (li direm C) cap a un dels costats iguals. Com que la mitjana no pot ser igual a cap dels costats que surten de C, per tal que els triangles obtinguts siguin també isòsceles haurà de ser igual a la meitat del costat AB. La hipotètica figura que teniu a la dreta mostra que el triangle no es pot construir perquè els angles ACB i ABC han de ser iguals per ser isòsceles el triangle ABC i β no pot ser igual a $\alpha + \beta$.



22. A. $E_x \neq E_y$ **i** $V_x > V_y$.

Si sabem que el volum d'un el·lipsoide de revolució és proporcional als seus tres semieixos arribarem a la conclusió indicada. Amb un xic de visió espacial ens adonarem que si es gira l'el·lipse al voltant de l'eix x, l'el·lipsoide E_x tindrà de semieixos a, a i b i al voltant de l'eix y, l'el·lipsoide corresponent E_y tindrà semieixos a, b i b. Així està clar que seran el·lipsoides diferents i, com que $a > b$ el volum de E_x, és a dir V_x serà més gran que que V_y.



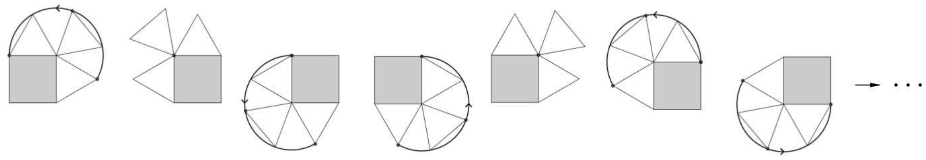
Ara bé, amb una visió espacial més acurada constatarem que, si $a > b$ l'el·lipsoide E_y queda tot ell a l'interior de l'el·lipsoide E_X.

23. D. 113.

Si a és el nombre de vegades que fem la operació (1) i b és el nombre de vegades que fem la operació (2), obtenim com a resultat $\dfrac{7+8a}{8+7b} = \dfrac{7}{8}$. Multiplicant en creu trobem $56 + 64a = 56 + 49b$ és a dir $64a = 49b$ o també $2^6\, a = 7^2\, b$ d'on es pot deduir que els mínims valors enters de a i b que compleixen la igualtat són precisament $a = 7^2$ i $b = 2^6$, que sumen 113.

24. B. $\dfrac{28}{3}\pi$.

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex veureu que es necessiten 8 girs en què el vèrtex es mogui realment perquè el triangle i el vèrtex tornin a la seva posició inicial. Cada un d'aquests girs és de $210° = \dfrac{7}{6}\pi$ rad i per tant, com que el radi del gir és 1, té una longitud de $\dfrac{7}{6}\pi$; com que són 8 trajectes la longitud total recorreguda és $\dfrac{56}{6}\pi = \dfrac{28}{3}\pi$.

25. D. 16.

En la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ algun dels x_i ha de ser el 3. Suposem que $x_4 = 3$. Llavors els dos últims sumands són múltiples de 3 i per tant la suma dels dos primers també ho ha de ser. Tenim doncs que $x_1x_2 + x_2x_3 = x_2(x_1 + x_3)$ ha de ser múltiple de 3. Veiem que x_2 no pot ser 2, ja que $2 \cdot (1 + 4) = 10$; en canvi si que pot ser $x_2 = 1$, que dóna lloc a $1 \cdot (2 + 4) = 6$ i també $x_2 = 4$ que dóna lloc a $4 \cdot (1 + 2) = 12$. En aquest cas tindríem quatre opcions: $\{4, 1, 2, 3\}$, $\{2, 1, 4, 3\}$, $\{1, 4, 2, 3\}$, $\{2, 1, 4, 3\}$ que són totes les permutacions possibles amb $x_4 = 3$.

Els casos per $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$ són del tot anàlegs i, per tant, hi ha $4 \cdot 4 = 16$ permutacions que compleixen la condició de l'enunciat.

26. D. 2012.

Totes les rectes paral·leles a $y = x$ són del tipus $y = x + c$, on c és un nombre real. Perquè tallin la paràbola donada en dos punts s'ha de complir que $x + c = x^2$ tingui dues solucions diferents, o sigui que $x^2 - x - c = 0$ ha de tenir discriminant positiu $1 + 4c > 0$. La suma d'abscisses de les arrels és $x_1 + x_2 = 1$ independentment del valor de c (sempre que $c > -1/4$). Podem considerar 2012 rectes que tallin la paràbola en dos punts (evidentment que hi ha 2012 nombres reals diferents més grans que -1/4) i la suma demanada serà 2012.

27. A. $A = (4, 3, 5)$.

En un cub només hi ha tres distàncies diferents possibles entre vèrtexs: una aresta, una diagonal d'una cara o una diagonal del cub.
Si calculem les distàncies entre els punts P, Q i R obtenim:
$d(PQ) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{72}$
$d(PR) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24}$
$d(QR) = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48}$
Com que són tres distàncies diferents i la més gran de totes és $d(PQ)$ això ens diu que aquesta és la diagonal del cub.
El seu punt mitjà és $M = \dfrac{P + Q}{2} = (4, 3, 5)$.

28. B. 3.

Si es calculen termes fins trobar regularitats, es troba que el terme 13è i 14è són dos 1 i, doncs, a partir d'ells es repeteixen:

1, 1, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, 1, 0, 1, 1,...

Aleshores si se sumen els números del cicle dóna 0, pel que la suma dels $12 \cdot 8 = 96$ primers termes serà 0, i ens caldrà sumar els quatre primers termes d'un nou grup. Per tant la resposta és $1 + 1 + 0 + 1 = 3$.

29. E. 6.

De l'enunciat en deduïm l'expressió $a \cdot b = \text{suma}(1 + 2 + ... + 26) - a - b$.
Com que $\text{suma}(1 + 2 + ... + 26) = 26 \cdot 27/2 = 351$ obtenim $a \cdot b = 351 - b - a$ i si aïllem a d'aquesta expressió, $a = \dfrac{351 - b}{b + 1}$.
Com que $a < 26$, podem comprovar que $b > 12$ perquè es compleixi la igualtat anterior. La divisió anterior només és entera per $b = 15$ (que comporta $a = 21$) o bé $b = 21$ (que dóna $a = 15$). Per tant $|a - b| = 6$.

La comprovació de possibilitats es pot accelerar veient mitjançant congruències en la igualtat inicial que b no pot ser congruent amb 2 (mod 3) ni congruent amb 4 (mod 5).

30. B. El 2n i el 2010è..

El primer gat boig que es descobreix, podria ser l'últim? Seria ...SSSB. Podria haver-hi abans algun altre gat boig no descobert? No podria ser el d'abans dels tres S finals perquè l'haurien descobert; i així successivament es dedueix que, perquè l'últim que entra sigui el primer gat boig descobert, tots els anteriors han de ser savis i això contradiu l'enunciat. Aquesta consideració elimina l'opció de resposta "El 4t i l'últim."

El gat boig que es descobreix, podria ser el penúltim? Seria ...SSBS. No pot ser ...(S)SSBS perquè el gat boig s'hagués descobert abans. Hauria de ser doncs ...(B)SSBS. Abans del B no hi pot anar un S és a dir ...(SB)SSBS perquè altrament s'hauria descobert un B abans. I així successivament es veu que hauria de ser (SSBBSSBBSSBB...SSBB)SSBS i concorda amb que l'últim pugui ser el 2012è i aleshores es descobreixi per primera vegada un gat boig. Si fos així no podrien ser bojos ni el primer ni el segon i s'eliminen les opcions de resposta "El 1r i el 2011è", i el "2n i el 2011è."

Podria ser l'avantpenúltim? Seria ...SBSS. Raonant semblantment al que ja hem fet anteriorment en aquest cas s'arriba a la conclusió que hauria de ser (SBSBSB....SB)SBSS, cosa que faria que quan entra el 2012è es descobreixi per primera vegada un gat boig i es veu que és correcta la resposta "El 2n i el 2010è."

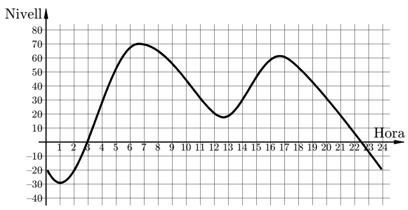
Si s'estudia de manera anàloga la resposta a la pregunta: podria ser el d'abans de l'avantpenúltim? s'elimina l'opció "El 3r i el 2009è."

XVII Cangur SCM Nivell 4

Solucions (22 de març de 2012)

Qüestions de 3 punts

1. A. 13 hores.



Al gràfic s'observa que el nivell de l'aigua supera els 30 cm entre les 4 hores i les 10 hores i entre les 14 hores i les 20 hores. En total, 13 hores.

---

2. D. $\sqrt[3]{9}$.

$\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = \left(3 \cdot 3^{1/3}\right)^{1/2} = 3^{4/3 \cdot 1/2} = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$.

---

3. A. 3.

La taula següent correspon a l'enunciat:

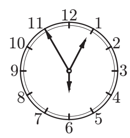
3	x	y	z	15

Tenim que $3xy = 54$ i, per tant $xy = 18$.
Com que $xyz = 90$ ha de ser $z = 5$
Finalment 15yz=225 i, per tant $y = \dfrac{225}{15z} = 3$.

---

4. E.

Si mirem amb atenció la figura donada veurem que la busca dels segons és la més curta, la dels minuts la més llarga i la de les hores és la mitjana. Per això a les 8:10:00 el rellotge marcarà el que s'indica a la solució E.



5. D. 4.

La suma de tots els números és 28, per tant hem de veure com sumem 14 amb un subconjunt (i com que el número 1 haurà d'estar en un dels dos subconjunts només cal considerar subconjunts que sumin 14 i continguin el número 1). Aquests són: $\{1,2,4,7\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,6,7\}$ i per tant la resposta és 4.

6. D. 0.

Si sumem les xifres d'un nombre de vuit xifres i dóna 7 és que forçosament alguna de les xifres és 0.

7. A. 12.

Els 0 al final d'un nombre només poden venir de multiplicar el mateix nombre de 2 i 5. Observem que $2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{15} \cdot 7^{17} = 2^{12} \cdot 5^{12} \cdot 5^{3} \cdot 3^{13} \cdot 7^{17}$ i això és $10^{12} \cdot 5^{3} \cdot 3^{13} \cdot 7^{17}$ i per tant el nombre de l'enunciat acaba en 12 zeros.

8. B. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Els resultats de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i $\frac{1}{f(x)}$ per a les funcions donades a les opcions de resposta són, respectivament:

- Opció A: $3x^2$ i $\dfrac{x^2}{3}$
- Opció B: x^2 i x^2.
- Opció C: $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ i x^2+1.
- Opció D: $2x^2+2$ i $\dfrac{x^2}{2x^2+2}$.
- Opció E: $\dfrac{x^4+1}{x^2}$ i $\dfrac{x^2}{x^4+1}$.

9. E. $x < -8$.

Com que $64 < x^2$ tenim que $x < -8$ o bé $x > 8$. Tenim també que $x^3 < 64$, per tant el cas $x > 8$ no és possible i aleshores $x^3 < 64 < x^2$ té com a solució el conjunt de tots els valors de x que compleixen $x < -8$.

10. B. 36°.

Els angles del pentàgon regular central són de 108°. Per tant cadascun dels angles en la base dels triangles isòsceles que són les puntes de l'estrella són de 72°. L'angle demanat serà de $180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Qüestions de 4 punts

11. C. 240.

Si la meva edat és una potència de 2 de dues xifres, ha de ser 25. L'edat del meu cosí és una potència de 2 de dues xifres; per tant només pot ser 16, 32 o 64 anys. Com que la suma de les quatre xifres ha de ser senar, això només ho compleix el 64 i el producte de les quatre xifres és $2 \times 5 \times 6 \times 4 = 240$.

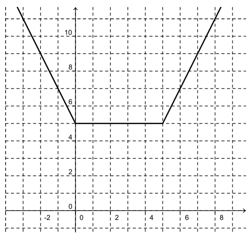
12. B. $20\,\%$.

La intersecció mínima de 4 subconjunts amb el $80\,\%$ d'elements en cada un d'ells, o sigui, excloent un $20\,\%$ cada vegada, arriba a excloure un màxim de $4 \times 20 = 80\,\%$. La resta, un $20\,\%$, són els que han anat a totes.

13. E. $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$.

Analitzem la funció $f(x) = |x| + |x-5|$. Es compleix que:

$$f(x) = |x| + |x-5| = \begin{cases} -2x+5 & \text{si } x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ 2x-5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

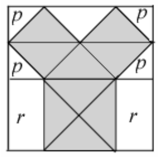


i la gràfica n'és la de la dreta. S'observa clarament que $|x| + |x-5| > 5$ si i només si $x > 5$ o bé $x < 0$.

14. D. Hi ha el doble de xiques que de xics.

Si n és el número de xics, amb mitjana x i m el de xiques, amb mitjana y, el total de punt sumant les notes de tota la classe és $n \cdot x + m \cdot y$.
La mitjana global es pot obtenir dividint el total de punts pel total d'alumnes, és a dir $\dfrac{n \cdot x + m \cdot y}{n+m}$.
En aquest cas serà $\dfrac{7{,}6 \cdot n + 8{,}2 \cdot m}{n+m} = 8$ que ens duu a $7{,}6 \cdot n + 8{,}2 \cdot m = 8 \cdot (n+m)$, o, sumant termes semblants $0{,}4 \cdot n = 0{,}2 \cdot m$ o, el que és el mateix $2n = m$: hi ha el doble de xiques que de xics.

15. B. 225 m^2.



La figura mostra que el terreny plantat de roses es pot dividir en 9 triangles rectangles isòsceles iguals (ombrejats). Per altra banda el quadrat de 20×20 que envolta tot el terreny es completa amb un triangle blanc igual als anteriors, quatre triangles (p) que donen la mateixa àrea que dos dels anteriors, i dos rectangles (r) que donen la mateixa àrea que el quadrat que tenen adjunt és a dir, com quatre triangles ombrejats. Així veiem que l'àrea plantada de roses són les $\dfrac{9}{16}$ parts d'un quadrat de 20×20, és a dir $\dfrac{9}{16} \cdot 20^2 = 225$.

16. C. 25.

Mitjançant la fórmula de la suma dels n primers nombres naturals $S = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ podem ignorar l'entrada repetida i veure que 40 entrades sumarien 820 i si s'afegeix la següent ja sumaria 861, que és massa. Així, restant 820 a 845 obtenim 25, que és el número de l'entrada que s'ha venut dos cops.

17. D. Segment AN més arc NB .

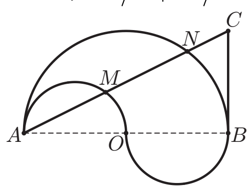
• A) arc ANB: té longitud π

• B) arc AO + arc OB : camí de longitud π, igual que l'arc ANB

• C) segment AC + segment CB és $1+\sqrt{5}$. Encara que no tinguem calculadora com que $2{,}2 \times 2{,}2 = 4{,}84$ sabem que $\sqrt{5} > 2{,}2$ i per tant el trajecte $C > \pi$

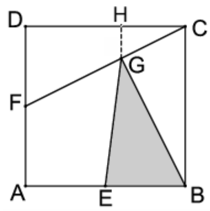
• D) segment AN + arc NB < arc AN + arc NB = trajecte A = π

• E) Segment AN més arc MO més arc OB . Per semblança E) és la meitat del trajecte D + arc OB però l'arc OB és $\pi/2$. Per tant $E = D/2 + \pi/2$ i com que $\pi > D$ podem deduir $E > D/2 + D/2 = D$.



18. B. $\frac{4}{5}$.

Per calcular l'àrea del triangle BEG veiem que la base $EB = 1$ m i l'altura serà la distància del punt G al costat AB, que podem obtenir restant de 2 la distància de G al costat CD, representada a la figura com GH. Apliquem el teorema de Thales als triangles semblants CDF i CHG, i obtenim la proporció $\frac{GH}{DF} = \frac{CG}{CF}$.



Observem que per la construcció de G tenim

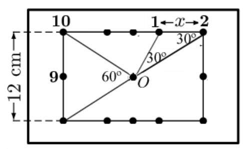
$$\frac{CG}{CF} = \frac{CG}{CG+GF} = \frac{CG}{CG+3\frac{CG}{2}} = \frac{2}{5}.$$

La proporció indicada i $DF = 1$ donen $GH =$distància$(C, CD) = \frac{2}{5}$.

Així àrea$(BEG) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2 - 2/5) = \frac{4}{5}$ m^2.

19. C. $4\sqrt{3}$.

O serà el centre del rellotge i P_i el punt de l'hora **i**. Com que la velocitat angular de les agulles del rellotge és constant, l'angle P_8OP_{10} és de 60° i l'angle P_1OP_2 és de 30°. Vist que és isòsceles i té un angle de 60°, el triangle P_8OP_{10} és equilàter.



Tenim $OP_{10} = OP_2 = 12$. OP_2 és la base del triangle isòsceles $P_{10}OP_2$, en el qual els angles iguals són de 30° i els costats iguals fan x. Això ens permet raonar que $\cos 30° = \frac{\text{mitja base}}{x} = \frac{6}{x}$ i d'aquí $c = 4\sqrt{3}$

20. D. $(0,1)$ **i** $(-\frac{1}{b}, 0)$.

Només cal substituir els punts en l'equació i veiem que la resposta correcta és la D.

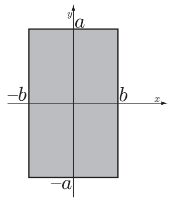
Qüestions de 5 punts

21. D. 24.

Són nombres de la sort tots els acabats en 0 (9), també els formats per un nombre parell i un 5 en els dos ordres (25,45,..56,58) (que són 8), el 55, el 59 i el 95 que en multiplicar les xifres donen nombres amb xifres "parell i 5" (3 més), i els que en multiplicar els dos dígits donin 54 o 56 (4 més). En total, doncs, 24

22. B. $C_x \neq C_y$ **i** $V_x > V_y$.

El volum d'un cilindre és proporcional al radi de la base al quadrat i a l'altura. Amb un xic de visió espacial ens adonarem que si es gira el rectangle al voltant de l'eix x, el cilindre C_x tindrà volum proporcional a a^2 i b i al voltant de l'eix y, el cilindre corresponent C_y tindrà volum proporcional a a i b^2. Així està clar que seran cilindres diferents i, com que $a > b$ el volum de C_x, és a dir V_x serà més gran que V_y.

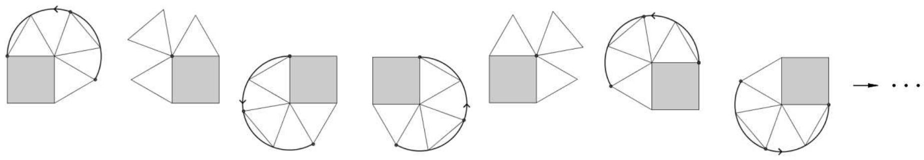


23. D. 113.

Si a és el nombre de vegades que fem la operació (1) i b és el nombre de vegades que fem la operació (2), obtenim com a resultat $\dfrac{7+8a}{8+7b} = \dfrac{7}{8}$. Multiplicant en creu trobem $56 + 64a = 56 + 49b$ és a dir $64a = 49b$ o també $2^6\, a = 7^2\, b$ d'on es pot deduir que els mínims valors enters de a i b que compleixen la igualtat són precisament $a = 7^2$ i $b = 2^6$, que sumen 113.

24. B. $\dfrac{28}{3}\pi$.

La imatge següent mostra les primeres rotacions. Observeu que en la segona, en la cinquena, etc. el vèrtex que interessa es queda quiet.



Si aneu continuant sistemàticament els girs i observeu la cadència de la línia que descriu el vèrtex podreu arribar a la solució.

Es necessiten 8 girs en què el vèrtex es mogui realment perquè el triangle i el vèrtex tornin a la seva posició inicial. Cada un d'aquests girs és de $210° = \frac{7}{6}\pi$ rad i per tant, com que el radi del gir és 1, té una longitud de $\frac{7}{6}\pi$; com que són 8 trajectes la longitud total recorreguda és $\frac{56}{6}\pi = \frac{28}{3}\pi$.

---

25. D. 2012.

Totes les rectes paral·leles a $y = x$ són del tipus $y = x + c$, on c és un nombre real. Perquè tallin la paràbola donada en dos punts s'ha de complir que $x + c = x^2$ tingui dues solucions diferents, o sigui que $x^2 - x - c = 0$ ha de tenir discriminant positiu $1 + 4c > 0$. La suma d'abscisses de les arrels és $x_1 + x_2 = 1$ independentment del valor de c (sempre que $c > -1/4$). Podem considerar 2012 rectes que tallin la paràbola en dos punts (evidentment que hi ha 2012 nombres reals diferents més grans que -1/4) i la suma demanada serà 2012.

---

26. B. 2 m.

Si imaginem un rectangle de 15 m d'alçada i 8 metres d'amplada, que enrotlla l'arbre (exactament, li dona 8 voltes), el camí dibuixat es transforma en la diagonal d'aquest rectangle que per Pitàgores veiem que val 17. Per tant la resposta és la B; recorre 17 m en comptes de 15 que recorreria si baixés pel dret.

---

27. B. 3.

El número $48510 = 10 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ compleix que el producte de tots els seus divisors té 36 zeros. El número 300 compleix que el producte de tots els seus divisors té 18 zeros, i el número 2100 compleix que el producte de tots els seus divisors té 36 zeros. El número 4000 també compleix aquesta condició, però per qualsevol número que tingui 4 o més zeros el producte dels divisors tindrà més de 50 zeros. Per tant la resposta és B) 3.

Una resposta raonada del problema vindria de la consideració que el producte de tots els divisors d'un nombre és una potència del nombre. Si el nombre de divisors és parell, exactament la potència del nombre que té per exponent la meitat del nombre de divisors i si, en canvi, el nombre de divisors és imparell l'exponent serà la meitat del nombre de divisors més 1.

---

28. C. 2.

Examinem, segons el signe de les variables, el sistema d'equacions

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

• Si $x \geq 0$ i $y \geq 0$ les equacions del sistema es transformen en $x + y = 1$ i $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 1$ que té una única solució $x = 1, y = 0$.

• Si $x \geq 0$ i $y \leq 0$, és a dir que $|y| = -y$ ens porta a la mateixa solució que ja coneixem.

• Si $x \leq 0$ i $y \geq 0$, és a dir que $|x| = -x$ ens quedarà $-x + y = 1$ i $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 1$ que ens porta a un sistema incompatible.

• Si $x \leq 0$ i $y \leq 0$ (ho deixem al lector) trobem la solució $x = -1, y = 0$.

29. C. 3.

De l'enunciat en deduïm l'expressió $a \cdot b =$ suma$(1 + 2 + ... + 17) - a - b$.
Com que suma$(1 + 2 + ... + 17) = 17 \cdot 18/2 = 153$ obtenim $a \cdot b = 153 - b - a$ i si aïllem a d'aquesta expressió, $a = \dfrac{153 - b}{b + 1} = -1 + \dfrac{154}{b + 1}$.
La divisió anterior només és entera i dóna valor de a en el conjunt que interessa per $b = 13$ (que comporta $a = 10$) o bé $b = 10$ (que dóna $a = 13$). Per tant $|a - b| = 3$.

30. D. El 2n i el 2010è.

El primer gat boig que es descobreix, podria ser l'últim? Seria ...SSSB. Podria haver-hi abans algun altre gat boig no descobert? No podria ser el d'abans dels tres S finals perquè l'haurien descobert; i així successivament es dedueix que, perquè l'últim que entra sigui el primer gat boig descobert, tots els anteriors han de ser savis i això contradiu l'enunciat. Aquesta consideració elimina l'opció de resposta "El 4t i l'últim."

El gat boig que es descobreix, podria ser el penúltim? Seria ...SSBS. No pot ser ...(S)SSBS perquè el gat boig s'hagués descobert abans. Hauria de ser doncs ...(B)SSBS. Abans del B no hi pot anar un S és a dir ...(SB)SSBS perquè altrament s'hauria descobert un B abans. I així successivament es veu que hauria de ser (SSBBSSBBSSBB...SSBB)SSBS i concorda amb que l'últim pugui ser el 2012è i aleshores es descobreixi per primera vegada un gat boig. Si fos així no podrien ser bojos ni el primer ni el segon i s'eliminen les opcions de resposta "El 1r i el 2011è", i, el "2n i el 2011è."

Podria ser l'avantpenúltim? Seria ...SBSS. Raonant semblantment al que ja hem fet anteriorment en aquest cas s'arriba a la conclusió que hauria de ser (SBSBSB....SB)SBSS, cosa que faria que quan entra el 2012è es descobreixi per primera vegada un gat boig i es veu que és correcta la resposta "El 2n i el 2010è."

Si s'estudia de manera anàloga la resposta a la pregunta: podria ser el d'abans de l'avantpenúltim? s'elimina l'opció "El 3r i el 2009è."