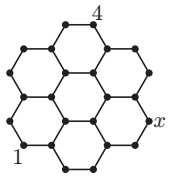
Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. En la figura de la dreta s'ha de col·locar un nombre en cadascun dels punts •, de manera que la suma dels nombres que es troben en els extrems de cada segment sigui la mateixa. Ja hi ha col·locats dos d'aquests nombres. Quin valor tindrà x ?



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 24

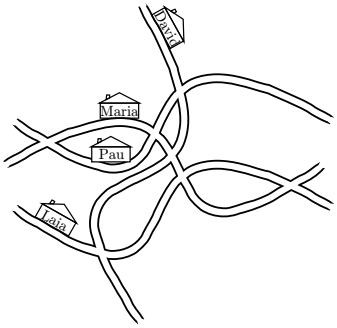
2. Tres esportistes, la Isabel, l'Agnès i la Hana, van participar en una cursa. Just després de la sortida, la Isabel anava primera, l'Agnès segona i la Hana tercera. Durant la cursa la Isabel i l'Agnès es van avançar l'una a l'altra nou vegades, l'Agnès i la Hana deu vegades, i la Isabel i la Hana onze vegades. En quin ordre van arribar a la meta?

A) Agnès, Hana, Isabel B) Isabel, Agnès, Hana C) Hana, Isabel, Agnès
D) Hana, Agnès, Isabel E) Agnès, Isabel, Hana

3. Si $2^x = 15$ i $15^y = 32$ aleshores $x \cdot y$ és igual a:

A) 5 B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ C) $\log_2 47$ D) 7 E) $\sqrt{47}$

4. La Joana, encara que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda de la Fletxa, l'avinguda de la Clau i l'avinguda del Regle són totes avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de la Joana viu a l'avinguda Corba?

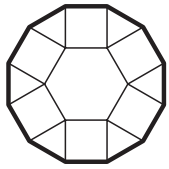


A) La Laia B) En Pau C) La Maria D) En David
E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet la Joana

5. Fem una llista, en ordre descendent, de tots els números de quatre xifres pels quals la suma de les seves xifres és igual a 4. En quina posició d'aquesta llista hi ha el número 2011?

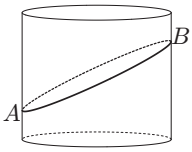
A) 6a B) 7a C) 8a D) 9a E) 10a

6. El dibuix mostra una figura formada per un hexàgon regular en què cada costat fa una unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



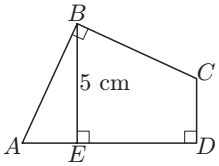
A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ B) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C) 9 D) $6+3\sqrt{2}$ E) 12

7. Un tros de paper rectangular està enrotllat al voltant d'un cilindre i hi ha un pla que el talla pels punts A i B, com es mostra en la figura. La part inferior del paper es desenrotlla. Quina de les figures següents en pot ser la resultant?



A) B) C) D) E)

8. Trobeu l'àrea del quadrilàter $ABCD$ (segons el dibuix) en el qual $AB = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, BE és perpendicular a AD i $BE = 5$ cm.



A) 20 cm^2 B) 22,5 cm^2 C) 25 cm^2 D) 27,5 cm^2 E) 30 cm^2

9. L'Andreu escriu els nombres imparells de l'1 al 2011 en una pissarra i, a continuació, en Pere esborra tots els múltiples de 3. Quants nombres queden a la pissarra?

A) 335 B) 336 C) 671 D) 1005 E) 1006

10. En Marc i l'Hug llancen uns daus per decidir qui ha de ser el primer en entrar a l'aigua d'un llac fred. Si no surt cap sis, en Marc serà el primer a banyar-se. Si només surt un sis, l'Hug entrarà a l'aigua en primer lloc i, si hi ha més sisos, cap dels dos no es banyarà. Quants daus han de llançar si volen que la probabilitat d'entrar a l'aigua en primer lloc sigui la mateixa?

A) 3 B) 5 C) 8 D) 9 E) 17

Qüestions de 4 punts

11. Ajuntem, sense superposició, tres rectangles de dimensions 7×11, 4×8 i $x \times y$ per fer un altre rectangle. Quines han de ser les dimensions $x \times y$ del tercer rectangle si volem que l'àrea del rectangle gran així format sigui màxima?

A) 1×11 B) 3×4 C) 3×8 D) 7×8 E) 7×11

12. En Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3 de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 sigui 10. Ja ha escrit quatre nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quin dels nombres següents podria ser la suma dels cinc restants?

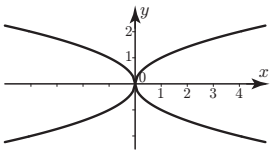
	2	
1		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) Cap dels anteriors és possible.

13. 48 nens d'una escola han anat a esquiar. Sis nens tenen exactament un germà que també hi és, nou nens hi són amb dos germans més, i quatre nens hi són amb tres germans més. Els altres nens no tenen cap germà en aquesta esquiada. Quantes famílies hi ha en l'esquiada?

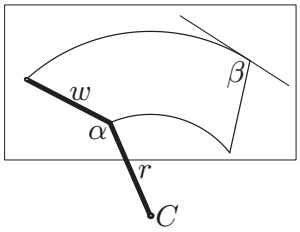
A) 19 B) 25 C) 31 D) 36 E) 48

14. Quants gràfics de les funcions $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$ i $y = -\sqrt{|x|}$ hi ha representats en el diagrama de la dreta?



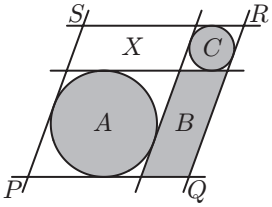
A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) Tots 8

15. L'eixugaparabrises del darrere d'un cotxe s'ha construït de manera que l'escombreta w i el braç r són d'igual longitud i s'uneixen formant un angle α. L'eixugaparabrises pivota en el centre C i escombra la zona, com es mostra en la figura. Determineu l'angle β entre la vora dreta de l'àrea escombrada i la tangent de la vora superior corbada.



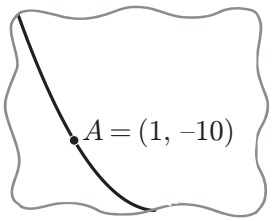
A) $\dfrac{3\pi-\alpha}{2}$ B) $\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ C) $\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$ D) $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ E) $\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

16. Tenim tres línies horitzontals i tres línies inclinades paral·leles entre elles. Els dos cercles són tangents a quatre de les línies. A, B i C són les àrees de les figures ombrejades. Quines àrees, entre les A, B i C, cal conèixer per a poder saber l'àrea del paral·lelogram X ?



A) A B) B C) C D) A i C
E) X no es pot calcular a partir d'A, B i C.

17. En el pla XY, amb els eixos cartesians habituals, el punt $A = (1, -10)$ es marca sobre la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Després s'esborren els eixos coordenats i quasi tota la paràbola, la qual, això sí, sabem que estava dibuixada en uns eixos paral·lels a les vores del full. Analitzeu bé tots els aspectes del gràfic i digueu quina de les afirmacions següents pot ser falsa.



A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$ D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$

18. En l'expressió

$$\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, i lletres diferents corresponen a nombres diferents. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

19. Trobeu la suma de tots els nombres enters positius x més petits que 100 de manera que $x^2 - 81$ sigui un múltiple de 100.

A) 200 B) 100 C) 90 D) 81 E) 50

20. Els germans Andreu i Bru contesten correctament les preguntes sobre la quantitat de membres que formen el seu club d'escacs. L'Andreu diu: *«Tots els membres del nostre club, excepte cinc, són homes»*. En Bru diu: *«En cada equip de sis membres hi ha, com a mínim, quatre dones»*. Quants membres té el club d'escacs?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 18

Qüestions de 5 punts

21. En cadascuna de les boles que s'utilitzen per a fer un sorteig hi ha escrit un nombre enter positiu, i cadascuna té un nombre diferent. 30 boles tenen escrit un nombre divisible per 6; 20 boles tenen un nombre divisible per 7, i 10 boles tenen un nombre divisible per 42. Quantes boles hi ha, com a mínim?

A) 30 B) 40 C) 53 D) 54 E) 60

22. Considereu les dues progressions aritmètiques

$$5, 20, 35, 50, 65, \ldots \qquad \text{i} \qquad 35, 61, 87, 113, 139, \ldots$$

Quantes progressions aritmètiques de nombres enters i positius diferents hi ha que continguin les dues progressions anteriors com a subsuccessions?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 26 E) Infinites

23. La successió de funcions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisfà les condicions següents:

$$\begin{cases} a)\ f_1(x) = x \\ b)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)} \end{cases}$$

Determineu el valor de $f_{2011}(2011)$.

A) 2011 B) $-\dfrac{1}{2010}$ C) $\dfrac{2010}{2011}$ D) 1 E) -2011

24. Una caixa conté unes quantes boles vermelles i unes quantes boles verdes. Si escollim aleatòriament dues boles de la caixa, són del mateix color amb una probabilitat de $\frac{1}{2}$. Quina de les quantitats següents pot ser el nombre total de boles que hi ha a la caixa?

A) 81 B) 101 C) 1000 D) 2011 E) 10001

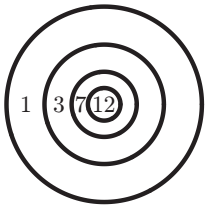
25. Una companyia aèria no cobra cap recàrrec per les maletes si el pes es troba dins un límit. Per cada kg extra es cobra una taxa. L'equipatge del senyor i la senyora Trip pesa 60 kg i han pagat 3 euros. L'equipatge del senyor Wander pesa el mateix però ha pagat 10,50 euros. Quin és el pes màxim que pot portar un passatger sense cap cost addicional?

A) 10 B) 18 C) 20 D) 25 E) 39

26. Els costats AB, BC, CD, DE, EF i FA d'un hexàgon són tots tangents a una certa circumferència. La longitud dels costats AB, BC, CD, DE, EF és 4, 5, 6, 7 i 8, respectivament. Per tant, la longitud del costat FA és:

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6
E) No es pot calcular la longitud de FA només amb aquesta informació

27. Robin Hood dispara i clava tres fletxes en aquesta diana. Quantes puntuacions totals diferents pot aconseguir?



A) 13 B) 21 C) 17 D) 20 E) 19

28. a, b i c són nombres enters i positius de manera que $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Quin és el menor nombre de divisors de $a \cdot b \cdot c$ (incloent-hi 1 i $a \cdot b \cdot c$)?

A) 30 B) 49 C) 60 D) 77 E) 1596

29. Escrivim vint nombres enters, positius i diferents en una taula 4×5. Qualsevol parell de nombres veïns (en cel·les amb un costat comú) tenen un divisor comú més gran que 1. Si n és el nombre més gran de la taula, trobeu el valor més petit possible de n.

A) 21 B) 24 C) 26 D) 27 E) 40

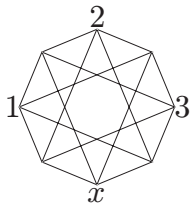
30. Un cub $3 \times 3 \times 3$ està fet amb petits cubs idèntics. Hi ha un pla que és perpendicular a la diagonal del cub gros i que passa pel seu centre. Quants cubs petits interseca aquest pla?

A) 18 B) 21 C) 20 D) 17 E) 19

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. En l'octògon de la figura s'han dibuixat vuit diagonals. Volem escriure en cada vèrtex una de les xifres 1, 2, 3 o 4, de manera que en els extrems dels setze segments dibuixats (costats i diagonals) hi haja xifres diferents. Si ja hi hem escrit les tres xifres que es veuen en el dibuix, quantes xifres distintes poden anar en el vèrtex indicat amb la x?



A) Només una B) Dues C) Tres D) Quatre
E) Cap, no es pot completar.

2. Siguen dos cercles coplanaris. El més petit té un radi de 10 cm. La distància entre els centres és de 6 cm. Els cercles només tenen un punt en comú. Quin és el radi del cercle més gran?

A) 12 cm B) 13 cm C) 14 cm D) 15 cm E) 16 cm

3. Els segments AB i AC són perpendiculars. La distància des del punt mitjà del segment BC fins al segment AB és més petita que la distància d'este punt fins al segment AC. Quina de les desigualtats següents és veritat?

A) $AB < AC < BC$ B) $AC < BC < AB$ C) $BC < AB < AC$
D) $AC < AB < BC$ E) $AB < BC < AC$

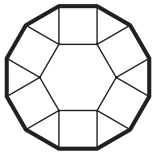
4. Si $2^x = 25$ i $25^y = 64$, aleshores $x \cdot y$ és igual a:

A) 6 B) $\log_2 25 + \log_{25} 64$ C) $\log_2 89$ D) 8 E) $\sqrt{89}$

5. Fem una llista, en ordre ascendent, de tots els números enters i positius de quatre xifres, la suma de xifres dels quals és igual a 4. En quina posició d'esta llista hi ha el número 2011?

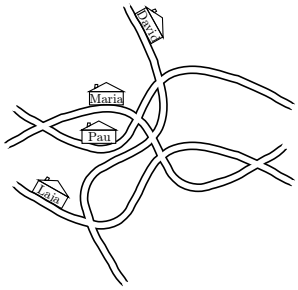
A) 7a B) 8a C) 9a D) 10a E) 12a

6. El dibuix mostre una figura formada per un hexàgon regular de costat unitat, sis triangles i sis quadrats. Quin és el perímetre de la figura?



A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ B) $6+3\sqrt{2}$ C) 12 D) $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ E) 9

7. La Joana, encara que no sap dibuixar gaire bé, ha intentat esbossar un mapa del seu poble. Ha dibuixat quatre avingudes amb els set encreuaments corresponents i les cases dels seus amics, però, en realitat, l'avinguda de la Fletxa, l'avinguda de la Clau i l'avinguda del Regle són totes avingudes rectes. La quarta avinguda és l'avinguda Corba. Quin dels amics de la Joana viu a l'avinguda Corba?



A) David B) Maria C) Laia D) Pau
E) No ho podem saber només mirant el dibuix que ha fet la Joana

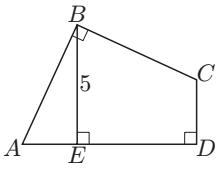
8. Joana té un dau amb una cara marcada amb un 5, dues cares marcades amb un 4 i tres cares marcades amb un 1. Joan té un altre dau igual que el de Joana. Si Joana i Joan tiren els dos daus simultàniament i sumen els punts, quina és la probabilitat del resultat més probable per a la suma dels punts que marquen els dos daus?

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{2}{9}$ E) $\dfrac{4}{9}$

9. Andreu escriu els nombres imparells de l'1 al 2011 en una pissarra i, a continuació, Pere esborra tots els múltiples de 3. Quants nombres queden en la pissarra?

A) 335 B) 1005 C) 336 D) 1006 E) 671

10. Trobeu l'àrea d'un quadrilàter $ABCD$ (vegeu dibuix) en el qual $AB = BC$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$, BE és perpendicular a AD i $BE = 5$.



A) 20 B) 22,5 C) 25 D) 27,5 E) 30

Qüestions de 4 punts

11. Una nau espacial es va desplaçar de la Terra a un planeta molt distant descobert recentment. Quan havia recorregut exactament un quart del camí, va perdre el contacte per ràdio. Aleshores, la nau va viatjar 2^{18} km sense comunicació i just en el moment en què va restablir el contacte, va rebre este missatge: *«Encara heu de recórrer* 2^{19} *km per arribar fins al planeta»*. La distància en quilòmetres des de la Terra al planeta es pot expressar com a potència de 2. Quin és l'exponent d'esta potència?

A) 18 B) 19 C) 22 D) 20 E) 24

12. Miquel vol escriure nombres enters i positius en les cel·les de la taula 3×3, de manera que la suma dels quatre nombres de cada quadrat 2×2 siga 10. Ja ha escrit quatre nombres a la taula, tal com es mostra en la figura. Quin dels nombres següents podria ser la suma dels cinc restants?

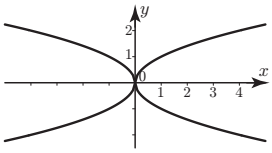
	2	
5		3
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13
E) El que diu l'enunciat no és possible.

13. 36 xiquets d'una escola han anat a esquiar. Deu xiquets tenen exactament un germà que també hi és, sis xiquets hi són amb dos germans més, i vuit xiquets hi són amb tres germans més. Els altres xiquets no tenen cap germà en l'esquiada. Quantes famílies s'han aplegat en esta esquiada?

A) 36 B) 21 C) 18 D) 22 E) 24

14. Quants gràfics de les funcions $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = +\sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = +\sqrt{|x|}$ i $y = -\sqrt{|x|}$ hi ha representats en el diagrama de la dreta?

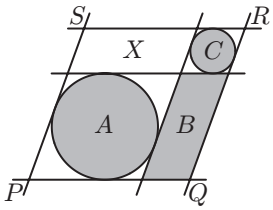


A) Cap B) 2 C) 4 D) 6 E) Tots 8

15. Ariadna, Berta, Carla, Diana i Eugènia fan una cursa en què només poden anar saltant, i cadascuna fa salts sempre de la mateixa longitud. Aquestes longituds són de 70, 80, 85, 90 i 95 cm, respectivament. Totes comencen en el mateix punt al llarg d'una pista circular de 400 metres de longitud encreuada per una rasa de 75 cm d'amplada. La cursa preveu que es facin 10 voltes a la pista i només una xiqueta arriba a la meta: les altres han caigut a la rasa. Qui és la guanyadora? (Observació: haureu de suposar que els peus d'estas xiquetes no tenen dimensions.)

A) És impossible respondre-ho sense més informació.
B) Berta C) Carla D) Diana E) Eugènia

16. Tenim tres línies horitzontals i tres línies inclinades paral·leles entre elles. Els dos cercles són tangents a quatre de les línies. A, B i C són les àrees de les figures ombrejades. Quines àrees, entre les A, B i C, cal conèixer per a poder saber l'àrea del paral·lelogram X ?

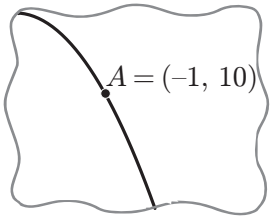


A) A i C B) A C) B D) C
E) X no es pot calcular a partir d'A, B i C.

17. Les cel·les d'una taula 9×9 s'acoloreixen en un d'aquests 3 colors: roig, blau o verd, talment que en qualsevol fila de la taula el nombre de cel·les roges és més gran o igual que el nombre de les cel·les blaves d'aquella fila i també més gran o igual que el nombre de cel·les verdes de la fila; i, en qualsevol columna, el nombre de cel·les blaves és més gran o igual que el nombre de cel·les roges i més gran o igual que el nombre de cel·les verdes. Quin és el mínim nombre mínim de cel·les verdes?

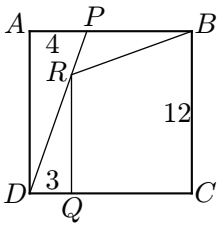
A) 0 B) 9 C) 3 D) 27 E) 10

18. Al pla XY, amb els eixos cartesians habituals, el punt $A = (-1, 10)$ es marca sobre la paràbola $y = ax^2 + bx + c$. Després s'esborren els eixos coordenats i quasi tota la paràbola, la qual, això sí, sabem que s'havia dibuixat en uns eixos paral·lels a les vores del full. Digueu quina de les afirmacions següents pot ser falsa.



A) $b^2 > 4ac$ B) $a < 0$ C) $b < 0$ D) $c < 0$ E) $a - b + c > 0$

19. La figura mostra un quadrat $ABCD$ de costat 12, P i Q són punts dels costats, talment que la distància AP és 4 i la distància DQ és 3. R és el punt del segment PD pel qual RQ és perpendicular a DC. Quina és la distància RB ?



A) $3\sqrt{10}$ B) 9 C) $\dfrac{28}{3}$ D) $\sqrt{72}$ E) $5+\sqrt{12}$

20. Els germans Andreu i Bru contesten correctament les preguntes sobre la quantitat de membres que formen el seu club d'escacs. Andreu diu: *«Tots els membres del nostre club, excepte cinc, són homes»*. Bru diu : *«En cada equip de sis membres hi ha, com a mínim, quatre dones»*. Quants membres té el club d'escacs?

A) 17 B) 11 C) 8 D) 7 E) 6

Qüestions de 5 punts

21. En una bossa hi ha moltes boles numerades amb nombres enters positius; cada bola té un nombre i tots els nombres són diferents. 40 boles tenen escrit un nombre divisible per 5, 30 boles un nombre divisible per 6, i 20 boles, un nombre divisible per 30. Quin és el nombre mínim de boles que hi ha d'haver en la bossa per tal que es complisquin eixes condicions?

A) 40 B) 60 C) 73 D) 90 E) 50

22. En un triangle rectangle la longitud de la hipotenusa és

$$\sqrt{1+3+5+\cdots+25}$$

i les longituds dels dos catets són

$$\sqrt{1+3+5+\cdots+(2m-1)} \quad \text{i} \quad \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$$

per a dos enters positius $m<n$. Quin és el valor de n?

A) 9
B) 10
C) 12
D) m i n no estan unívocament determinats.
E) No podem trobar dos enters positius que complisquen l'enunciat.

23. La successió de funcions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ satisfà les condicions següents:

$$\begin{cases} a)\ f_1(x) = x \\ b)\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)} \end{cases}$$

Determineu el valor de $f_{2011}(2011)$.

A) 1 B) $-\dfrac{1}{2010}$ C) $\dfrac{2010}{2011}$ D) 2011 E) -2011

24. El rellotge digital de 24 hores de l'habitació marcava l'hora correcta a la mitjanit, quan la primera donyeta hi va aparèixer, i, com que era una sola, va avançar l'hora que marcava el rellotge una hora. A la 1.00, va aparèixer la segona i llavors ja n'eren dues, així que van avançar l'hora que marcava el rellotge dues hores. Després d'una hora, va aparèixer la tercera, etc. Cada hora, començant per la mitjanit, les donyetes avançaven l'hora que marcava el rellotge tantes hores com el nombre de donyetes que en aquell moment s'havien aplegat en l'habitació. Quantes donyetes eren en l'habitació quan van canviar l'hora a la de la mitjanit per primera vegada?

A) 12 B) 15 C) 24 D) 48
E) Mai no tornen a canviar l'hora a la de la mitjanit.

25. Una companyia aèria no cobra cap recàrrec per les maletes si el pes es trobe dins un límit. Per cada quilo extra es cobre un taxa. L'equipatge del senyor i la senyora Trip pesa 80 kg i han pagat 40 €. L'equipatge del senyor Wander pese el mateix però ha pagat 100 €. Quin és el pes màxim que pot portar un passatger sense cap cost addicional?

A) 39 B) 30 C) 20 D) 18 E) 10

26. En l'expressió

$$\frac{C \cdot A \cdot N \cdot G \cdot U \cdot R}{J \cdot O \cdot C}$$

cada lletra representa un nombre enter i positiu d'una sola xifra, lletres diferents corresponen a nombres diferents i el punt volat $(\cdot)$ és el signe de la multiplicació. Quin és el mínim valor enter de l'expressió?

A) 2 B) 10 C) 35 D) 1 E) Un altre valor

27. Calculem el simètric del punt $(0, 2011)$ respecte de la recta $y = mx$. Per quants nombres enters positius, m, aquest simètric és un punt de coordenades enteres?

A) 1
B) 2
C) 3
D) Més de 3, però en un nombre finit.
E) Per infinits nombres enters positius.

28. Si $a = \log_3 5$, $b = \log_5 7$ i $c = \log_7 9$, quina de les respostes següents és certa?

A) $a < b < c$ B) $b < c < a$ C) $c < b < a$ D) $b < a < c$ E) $c < a < b$

29. Una funció f compleix que $f(1) = 2011$ i, a més, pels nombres naturals $n, n \geq 2$,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$$

Quant és $f(2011)$?

A) $\frac{1}{1005}$ B) $\frac{2}{2012}$ C) $\frac{3}{2011}$ D) $\frac{1}{2011}$ E) $\frac{1}{670}$

30. Siguen x, y i z nombres racionals, diferents de 0, talment que els nombres $a = x + y + z$ i $b = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ siguen enters. Quin és el valor mínim de $a^2 + b^2$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 9

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Premis i mencions. Catalunya i Andorra

Primer premi
Eduard Vázquez Espín (Institut de Pallejà, Pallejà), 105.75 punts

Segon premi
Adrià Balcázar Castell (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 100.25 punts

Tercer premi
Petar Hlad (Joan Pelegrí, Barcelona), 94 punts

Altres premis
Víctor Bustillo Ballester (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 93.25
Albert Ros Lloreta (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 92 punts
Víctor Martínez Abad (Institut Secretari Coloma, Barcelona), 91.25 punts
Ferran Alet Puig (Aula Escuela Europea, Barcelona), 91 punts
Marc Dalmasso Blanch (Claver, Lleida), 89.75 punts
Alejandro Serés Cabasés (Institut Samuel Gili i Gaya, Lleida), 89.25 punts
Marta Porta Comin (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 88 punts
Oscar Comino Trinidad (Institut Manuel Blancafort, La Garriga), 87.75 punts
Óscar Lozano Pérez (Aula Escuela Europea, Barcelona), 85.75 punts
Lluís Laguarda Sanchez (Escola Pia de Mataró, Mataró), 85.5 punts
Sergi Cebrián Gres (Fundación Escuela Suiza, Barcelona), 85 punts
Jie Luan (Institut Montsacopa, Olot), 84 punts

Mencions fins a l'1% de les millors puntuacions
Eduard Blanch Urban (La Salle Bonanova, Barcelona), 83.75 punts
Miguel Amer Ferrando (Sant Joan Bosco, Barcelona), 83.25 punts
Arnau Guardia Berdiell (Institut Marius Torres, Lleida), 83 punts
Albert Van Eeckhout Alsinet (Institut Montserrat, Barcelona), 82 punts
Marc Clupés Pero (Escola Pia de Mataró, Mataró), 81.75 punts
Lluís Solsona Sabanés (Institut Jaume Balmes, Barcelona), 81.5 punts
Víctor Gullón Altés (Institució Cultural del C.I.C., Barcelona), 80.5 punts
Marc Cendra Martínez (Institut Angeleta Ferrer i Sensat, Sant Cugat),
Gerard Feliu Montesinos (La Salle, Girona),
Teresa Franco Leyva (Aula Escuela Europea, Barcelona) i
Eduardo Gascón Álvarez (Europa, Sant Cugat del Vallès), 80.25 punts

Premis. Balears

Primer premi
Rafael Eusebio López Martínez (Col·legi Sant Josep Obrer I, Palma), 115 punts

Segon premi
Yeray Vivó Valls (IES Joan Alcover, Palma), 86,25 punts

Tercer premi
Miquel Hernández Nicolau (Col·legi La Salle, Palma), 80,75 punts

Altres premis
Maria Francesca Font Picó (IES Josep Sureda i Blanes, Palma), 75,5 punts
Álvaro Morote Derqui (IES Joan Alcover, Palma), 74,5 punts
Filip Andrzej Bugajski (Col·legi CIDE, Palma), 74 punts
Marino González Díaz (IES Francesc de Borja Moll, Palma), 71,5 punts
Catalina Serra Tomàs (IES Joan Alcover, Palma), 70,5 punts
Leonard Witte (IES Guillem Cifre de Colonya, Pollença), 70,25 punts
Adrià Salom Rullan (IES Madina Mayurqa, Palma), 70 punts

Premis. País Valencià

Primer premi
Diego Monserrat López (IES La Plana, Castelló de la Plana), 98.25 punts

Segon premi
Jorge Peña Queralta (IES L'Almadrava, Benidorm), 97.25 punts

Tercer premi
Rafael Borrás Pernas (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 94 punts

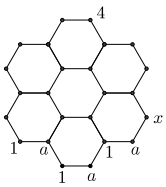
Altres premis
Juan Falomir Ortí (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València) i
Oscar Miguel Escrig (IES Francesc Ribalta, Castelló de la Plana), 89.25 punts
Cristian Navas Martorell (IES Enric Soler i Godes, Benifaió), 88 punts
David Ribo Pérez (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València), 85 punts
Alex Arenas Ferrer (IES Vicenta Ferrer Escrivà, València), 84.5 punts
Javier Barahona Albiol (IES La Plana, Castelló de la Plana), 83.25 punts
Jethro David Howard (IES Gabriel Ciscar, Oliva), 80.75 punts

Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



2. A. Agnès, Hana, Isabel.

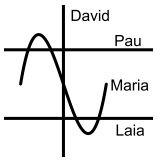
Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Hana; en canvi l'Agnès i la Hana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Hana al final les posicions seran Agnès-Hana-Isabel.

3. A. 5.

Com que $32 = 15^y = (2^x)^y = 2^{x \cdot y}$ i $32 = 2^5$ aleshores $x \cdot y = 5$.

4. C. Maria.

L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer d'en Pau, un cop al carrer d'en David i dos cops al carrer de la Laia i, doncs, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.

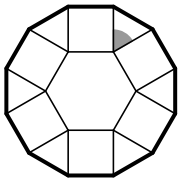


5. D. 9a.

Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb el 4000, segueix amb els tres que comencen per 3 (3100, 3010, 3001), i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002. El 2011 ocupa la novena posició.

6. E. 12.

Tots els costats dels quadrats són d'1 unitat. Com que l'angle interior d'un hexàgon regular és de 120° resulta que els angles com el que s'ha marcat a la figura són de $360° - 2 \times 90° - 120° = 60°$. Per tant els triangles són isòsceles amb un angle de 60°, és a dir equilàters, i el costat dels triangles que és del perímetre de la figura és d'1 unitat. La figura té 12 costats, tots d'1 unitat: el perímetre és 12.

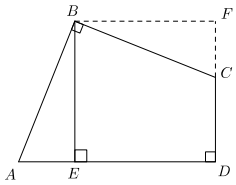


7. C.

Com que la figura resultant ha de tenir simetria, la corba demanada no podrà ser la D). Com que la corba resultant ha de ser derivable no podrà ser la A) ni la E), no derivables en el punt més alt, ni tampoc la B) que no resultaria derivable en el seu punt més baix.

8. C. 25 cm^2.

Si construim el triangle rectangle BCF perllongant CD i fent $BF \perp DF$ aleshores, com que les hipotenuses són iguals per l'enunciat i els angles aguts en B són iguals perquè tenen els costats perpendiculars resulta que el polígon $EDFB$ és un quadrat de costat 5 cm que té la mateixa àrea que el quadrilàter $ABCD$.



9. C. 671.

A la llista dels nombres imparells de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2011-1}{2} + 1 = 1006$ nombres. Com que 2010 és múltiple de 3, a la llista de tots els nombres enters de 1 a 2011 hi ha $\dfrac{2010}{3} = 670$ múltiples de 3, però els que siguin múltiples de 6 no seran a la llista que estem estudiant; com que 2010 també és múltiple de 6, d'aquests n'hi ha $\dfrac{2010}{6} = 335$ i, doncs, a la llista inicial hi ha $670 - 335 = 335$ múltiples de 3 que seran els que esborrarà en Pere. Quedaran a la llista $1006 - 335 = 671$ nombres.

10. B. 5.

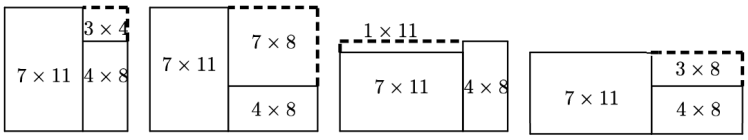
Quan es llancen n daus, la probabilitat que no surti cap 6 és $p(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ i la probabilitat que surti exactament un 6 és $p(1) = n \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Si han de ser iguals $p(0) = p(1)$, es dedueix $\frac{5}{6} = n \cdot \frac{1}{6}$ i, per tant, $n = 5$.

Qüestions de 4 punts

11. D. 7×8.

A la figura següent es mostren els únics quatre possibles rectangles que es poden compondre amb els dos que ja tenim i un altre. És clar que el de 7×8 és el d'àrea més gran de tots quatre i, per tant, el que dóna lloc a un rectangle sencer d'àrea més gran.

A la figura hi apareixen rectangles corresponents a quatre de les opcions de respsota; amb dos rectangles de 7×11 i un de 4×8 (que seria l'altra opció de resposta) no podem compondre un rectangle.



12. E. Cap dels anteriors és possible.

Indiquem com x el nombre de la primera casella; a la dreta podeu veure la taula completada. Aleshores la suma dels cinc nombres que no coneixíem és $S = x + x - 2 + 7 - x + x - 2 + x - 4 = 3x - 1$, és a dir que ha de ser un múltiple de 3 menys 1. Cap dels quatre nombres 9, 10, 12 o 13 compleix aquesta condició.

x	2	$x-2$
1	$7-x$	3
$x-2$	4	$x-4$

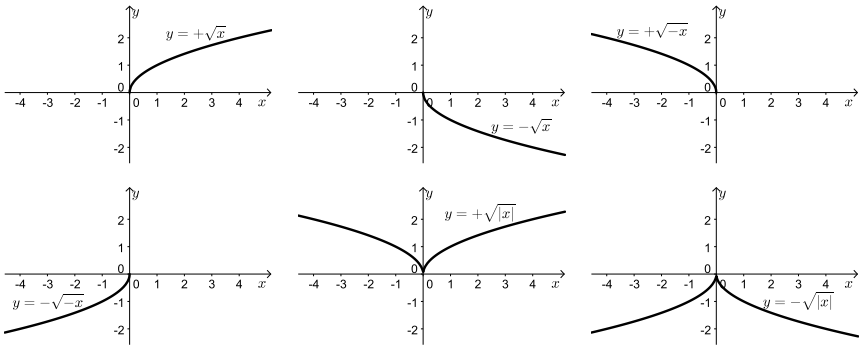
13. D. 36.

Els 6 nens que tenen un germà pertanyen a 3 famílies; els 9 nens que tenen dos germans seran de 3 famílies diferents; finalment els 4 nens que tenen 3 germans seran tots de la mateixa família. Fins aquí hem comptat 19 nens dels 48 components del grup; els 29 restants són tots de famílies diferents. El nombre total de famílies és doncs $3 + 3 + 1 + 29 = 36$.

14. D. 6.

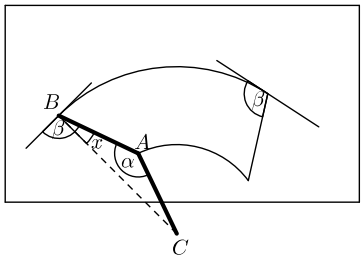
Com que l'eix de les x és horitzontal, veiem de seguida que no hi ha cap de les dues paràboles que són la gràfica de les funcions $y = x^2$ i $y = -x^2$.

Tot seguit podeu veure que les gràfiques de les altres funcions sí que hi són.



15. B. $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$.

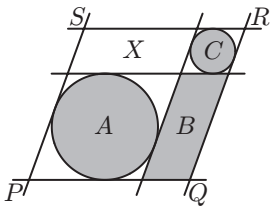
L'angle β que es demana és el mateix que, en qualsevol posició de l'eixugaparabrises formen l'escombreta w i la tangent al cercle que determina l'extrem de l'escombreta.



Aleshores amb les denominacions de la figura el triangle CAB és isòsceles i, doncs, en radiants, $x = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$. Ara bé, com que CB és un radi del cercle que constitueix la vora superior corbada de l'àrea escombrada és perpendicular a la tangent i, per tant $\beta = \dfrac{\pi}{2} + x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi - \alpha}{2} = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$.

16. B. B.

Si un paral·lelogram té un cercle inscrit, el paral·lelogram és un rombe. A partir d'aquest fet es dedueix que el paral·lelogram d'àrea B i el paral·lelogram d'àrea X són iguals. Per tant, quan coneixem B ja coneixem X. Les àrees A i C no determinen ni B ni X.



17. E. $c < 0$.

A partir d'una anàlisi acurada de la figura de l'enunciat, que mostra un fragment de la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$ deduïm que:

• La paràbola té un mínim i, per tant, $a > 0$

• L'abscissa del vèrtex $v = \dfrac{-b}{2a} > 1$ i, com que ja sabem que $a > 0$ veiem que ha de ser $b < 0$.

• Com que l'ordenada del mínim és negativa, la funció té dues arrels reals i, per tant, el discriminant és positiu: $b^2 > 4ac$.

• Es compleix $f(1) = a + b + c = -10 < 0$.

• En canvi pot ser $c < 0$, $c = 0$ o bé $c > 0$ segons quin sigui el valor de l'arrel més petita de la funció, negatiu, 0 o positiu. Exemples: $y = x^2 - 6x - 5$, $y = x^2 - 11x$ i $y = x^2 - 16x + 5$.

18. B. 2.

Comencem per observar que G i A no influeixen en el resultat; se simplifiquen. Si volem el mínim valor per a l'expressió hem de pensar que M i E prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9, però també hem de veure si es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Això ho aconseguim posant $O = 1$ i, com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, amb $\{K, A, N, R\} = \{2, 3, 4, 6\}$.

19. A. 200.

Ha de ser $x^2 - 81 = 100n$, és a dir $x^2 = 100n + 81$. Deduïm que x ha d'acabar en 9 (podria ser $x = 10k+9$ per k enter i $0 \leq k \leq 9$) o en 1 (podria ser $x = 10r + 1$ amb r enter i $1 \leq k \leq 9$).
En el primer cas tindrem $x^2 = (10k + 9)^2 = 100k^2 + 180k + 81$ i, a fi i efecte que aquest valor sigui un múltiple de 100 més 81, resulta que $180k$ ha de ser múltiple de 100 i això, per als valors de k que interessen només ho compleixen $k = 0$ i $k = 5$, que ens donen $x = 9$ i $x = 59$.
En el segon cas trobem $x^2 = (10r + 1)^2 = 100r^2 + 20r + 1$ expressió que podem reescriure com $100r^2 + 20(r - 4) + 81$ i deduïm que $20(r - 4)$ ha de ser múltiple de 100 cosa que succeeix per $r = 4$ i per $r = 9$, que ens donen $x = 41$ i $x = 91$. Els quatre valors de x que hem trobat sumen 200.

20. B. 7.

Posem que al club hi ha H homes i D dones. Com que en Bru i l'Andreu són del club, $H \geq 2$. Com que tots, excepte 5 membres, són homes ha de ser $D = 5$. Finalment, com que a cada equip de 6 membres que es pugui formar hi ha, com a mínim, 4 dones ha de ser exactament $H = 2$, ja que si fos $H \geq 3$ ja podríem formar un equip de 3 homes i 3 dones, contra el que estableix l'enunciat. Per tant $H = 2$ i $D = 5$.

Qüestions de 5 punts

21. B. 40.

La mínima quantitat possible de boles a la bossa s'obtindrà quan no n'hi hagi cap més que les que indica l'enunciat. Com que els múltiples de 42 també ho són alhora de 6 i de 7 és segur que hi ha com a mínim $30 + 20 - 10$ nombres. Els múltiples de 42 constitueixen la intersecció del conjunt de múltiples de 6 i el conjunt de múltiples de 7 i els hem de restar de la quantitat total perquè en fer $30 + 20$ els havíem comptat dues vegades.

22. C. 5.

Com que una de les progressions aritmètiques té diferència 15 i l'altra té diferència 26 i el mcd(15,26)=1, una altra progressió aritmètica que les contingui totes dues com a subsuccessions ha de tenir forçosament diferència 1. Com que ha de ser de nombres enters positius diferents i n'ha de formar part el 5 les úniques progressions que ho poden complir són aquestes cinc: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$, $\{4, 5, 6, \ldots\}$, $\{5, 6, \ldots\}$.

23. A. 2011.

A partir de $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ podem obtenir successivament $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$; $f_3(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \dfrac{x-1}{x}$; $f_4(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$ i, doncs, la successió de funcions té cicle 3.

Com que el residu de la divisió de 2011 per 3 és 1 resulta que $f_{2011}(x) = f_1(x) = x$ i, per tant, $f_{2011}(2011) = 2011$.

24. A. 81.

Si indiquem amb t el nombre total de boles a la bossa i amb r el nombre de boles roges, $t - r$ serà el nombre de boles verdes.

La probabilitat que surtin dues boles roges és $\dfrac{r(r-1)}{t(t-1)}$ i la probabilitat que surtin dues boles verdes és $\dfrac{(t-r)(t-r-1)}{t(t-1)}$.

La probabilitat que surtin dues boles del mateix color és

$$\frac{r(r-1)}{t(t-1)} + \frac{(t-r)(t-r-1)}{t(t-1)} = \frac{1}{2}.$$

Si operem en aquesta igualtat arribem a $4r^2 - 4tr - t^2 - t = 0$. Aïllem r amb la fórmula de l'equació de segon grau, simplifiquem i obtenim $r = \dfrac{t + \sqrt{t}}{2}$.

Com que r ha de ser un nombre enter, veiem que t ha de ser un quadrat perfecte i, recíprocament, si t és un quadrat perfecte, com que t i $\sqrt{t}$ tenen la mateixa paritat r és un nombre enter i t és solució del problema. De les opcions de resposta l'única que és quadrat perfecte és 81.

25. D. 25.

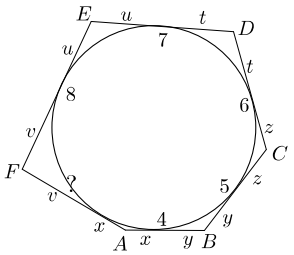
Si x és el pes màxim sense cost i t és la taxa per quilo extra, l'enunciat es tradueix així:

$$\begin{cases} (60 - 2x)t = 3 \\ (60 - x)t = 10,5 \end{cases}$$

Si resolem el sistema d'equacions resulta $x = 25$.

26. D. 6.

La figura de la dreta mostra un esquema de l'enunciat i hem posat distàncies x, y, z, t, u, v que descomponen els costats a partir de la condició de tangència dels sis costats a la circumferència. Tenim que $x + y = 4$, $y + z = 5$, $z + t = 6$, $t + u = 7$ i $u + v = 8$ i volem trobar el valor de $v + x$.



Si sumem la primera, la tercera i la cinquena de les condicions anteriors i per altra banda la segona i la quarta, obtenim

$$\begin{cases} x + y + z + t + u + v = 18 \\ \qquad\quad y + z + t + u = 12 \end{cases}$$

d'on deduïm, restant les dues equacions, $x + v = 6$.

27. E. 19.

El nombre de "possibles sumes" diferents de 3 sumands triats en $\{1, 3, 7, 12\}$, sense tenir en compte l'ordre, és $CR_4^3 = \binom{4+3+1}{3} = 20$, però cal estudiar en quants casos poden aparèixer resultats repetits. Si escrivim totes les possibles sumes veurem que això només succeeix per a $3 + 3 + 3 = 7 + 1 + 1$ i, per tant, hi ha 19 resultats diferents de les sumes.

28. D. 77.

De les condicions que imposa l'enunciat se'n dedueix que a, b i c han de tenir tots tres com a mínim els factors 2 i 3. Si busquem que $a \cdot b \cdot c$ tingui el menor nombre de divisors això succeirà quan només tinguin aquests factors: $a = 2^x \cdot 3^y$, $b = 2^z \cdot 3^t$ i $c = 2^u \cdot 3^v$ i, per tant $a^2 = 2^{2x} \cdot 3^{2y}$, $2b^3 = 2^{3z+1} \cdot 3^{3t}$ i $3c^5 = 2^{5u} \cdot 3^{5v+1}$ d'on es dedueix que s'ha de complir $2x = 3z + 1 = 5u$ i $2y = 3t = 5v + 1$. Les solucions mínimes, que són les que donen la solució del problema, són: $x = 5, z = 3, u = 2$ i $y = 2, t = 3, v = 1$ d'on $a \cdot b \cdot c = 2^{10} \cdot 3^6$, que té $11 \cdot 7 = 77$ divisors.

29. C. 26.

Les imatges mostren dues solucions per a les quals el nombre més gran de la taula és $n = 26$.

7	21	3	15	5
14	6	18	10	25
2	16	9	12	20
26	8	24	22	4

7	21	3	15	5
14	6	9	10	25
2	8	18	12	20
4	16	22	24	26

No es pot tobar una taula per a la qual el nombre màxim sigui més petit que 26 perquè:

• No hi pot haver l'11 perquè a les cel·les veïnes hi hauria d'haver com a mínim 22 i 33.

• Per raons semblants no hi pot haver ni el 13, ni el 17, ni el 19, ni el 23.

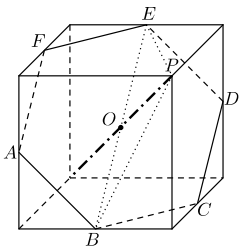
• És clar que tampoc no hi pot haver l'1.

A les taules anteriors tenim la llista dels 20 nombres més petits sense $\{1, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

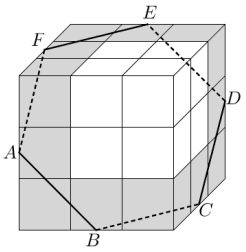
30. E. 19.

Un pla perpendicular a la diagonal d'un cub pel seu punt mitjà talla el cub en una secció que és un hexàgon regular que té per vèrtexs els punts mitjans de 6 arestes del cub. A partir d'aquesta propietat es dedueix que en la situació de l'enunciat el pla interseca 19 petits cubs.

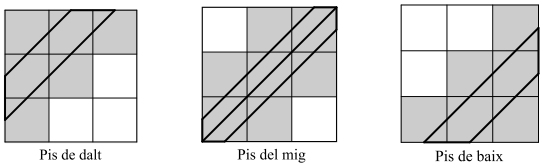
Si P és un dels vèrtexs que determinen la diagonal i E i B són els punts mitjans de dues arestes com es veu a la figura, $PB = PE$ i, per tant, en el pla PBE, P és un punt de la mediatriu de BE que passa per O, centre del cub. Així es dedueix que la diagonal $PO \perp BE$. De manera semblant es deduiria que la diagonal $PO \perp AD$. Per tant el pla que passa per $ABDE$ és el pla perpendicaular a la diagonal que passa per O.



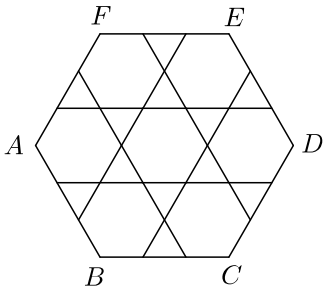
És clar que el pla talla el cubet central (ja en tenim 1). Com que el que acabem de dir és vàlid tant per al cub gran com per al cub petit central es raona de seguida que el pla interseca també amb els petits cubs centrals de cada una de les cares perquè les interseccions del pla amb el cub central també són interseccions amb aquests cubs (ja tenim 6 cubs intersecats més). La figura de la dreta ensenya quins altres cubs petits exteriors interseca el pla (12, comptant els del darrere). En total, doncs, són 19 els petits cubs afectats.



Comptem-ho duna altra manera: al pis de dalt, 6 cubets, al del mig 7 cubets, al de baix 6 cubets afectats.



Per acabar mostrem a la dreta quina és la secció que el pla determina en la col·lecció de petits cubs que componen el cub gran.

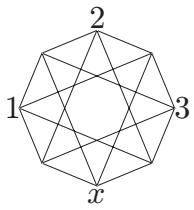


Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 4

Qüestions de 3 punts

1. C. 3.

El vèrtex entre el punt 2 i el 3 ha tenir el 4 perquè també hi arriba un segment que surt de l'1. Per la mateixa raó el vèrtex entre el 2 i l'1 ha de tenir el 4. El vèrtex següent al 3 en sentit horari també ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents de l'1 i del 2. I el vèrtex següent a l'1 en sentit antihorari ha de tenir el 4 perquè hi arriben segments provinents del 2 i del 3. Per tant el punt indicat amb x queda unit amb quatre 4 i, doncs, allà hi pot anar qualsevol dels altres tres nombres.

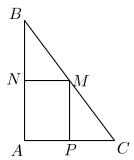


2. E. 16 cm.

Els dos cercles han de ser tangents. Si la distància d entre centres és de 6 cm i el radi r del cercle que ja coneixem és de 10 cm, els dos cercles han de ser tangents de manera que un sigue interior a l'altre. Si el que busquem ha de ser més gran que el que coneixem $R = r + d = 10 + 6 = 16$ cm.

3. D. $AC < AB < BC$.

Donat que l'angle $\angle A$ és recte, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle, i BC n'és la hipotenusa. Si marquem els segments per trobar les distàncies des del punt M, punt mitjà de BC als costats AB i AC, a la figura s'observen 2 triangles iguals, $\triangle NBM = \triangle PMC$, semblants a $\triangle ABC$ Com que a partir de l'enunciat $MN < MP = BN$, fent ús del Teorema de Tales es dedueix que $AC < AB$ i com que estos són els catets de $\triangle ABC$ i BC és la hipotenusa, més gran que els catets, serà $AC < AB < BC$.



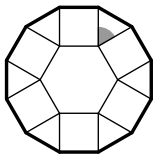
4. A. 6.

Com que $64 = 25^y = (2^x)^y = 2^{x \cdot y}$ i $64 = 2^6$ aleshores $x \cdot y = 5$.

5. E. 12a.

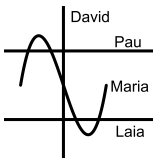
Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb tots els que tenen primera xifra un 1, que són 10 nombres, a saber (no indicats per ordre) el que està format per quatre 1, sis que tenen un 1 seguit de un 1, un 2 i un 0 i tres que tenen un 1 seguit de un 3 i dos 0. i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2002, 2011. El 2011 ocupa la dotzena posició.

6. C. 12.



Tots els costats dels quadrats són d'1 unitat. Com que l'angle interior d'un hexàgon regular és de 120° resulta que l'angle de cada triangle com el que s'ha marcat a la figura és de $360° - 2 \times 90° - 120° = 60°$ i, per tant els triangles són isòsceles amb un angle de 60° és a dir que són triangles equilàters. El costat d'aquests triangles que pertany al perímetre de la figura també és d'1 unitat. Com que la figura exterior té 12 costats, tots d'1 unitat, el perímetre és 12.

7. C. Maria.



L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer de Pau, un cop al carrer de David i dos cops al carrer de Laia i, per tant, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.

8. A. $\frac{1}{3}$.

	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

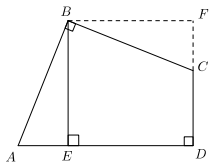
Possiblement la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada. D'esta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

9. E. 671.

A la llista dels nombres imparells de 1 a 2011 hi ha $\frac{2011-1}{2}+1=1006$ nombres. Com que 2010 és múltiple de 3, a la llista de tots els nombres enters de 1 a 2011 hi ha $\frac{2010}{3}=670$ múltiples de 3, però els que siguin múltiples de 6 no seran a la llista que estem estudiant; com que 2010 també és múltiple de 6, d'aquests n'hi ha $\frac{2010}{6}=335$ i, doncs, a la llista inicial hi ha $670-335=335$ múltiples de 3 que seran els que esborrarà en Pere. Quedaran a la llista $1006-335=671$ nombres.

10. C. 25 cm^2.

Si construim el triangle rectangle BCF perllongant CD i fent $BF \perp DF$ aleshores, com que les hipotenuses són iguals per l'enunciat i els angles aguts en B són iguals perquè tenen els costats perpendiculars resulta que el polígon $EDFB$ és un quadrat de costat 5 cm que té la mateixa àrea que el quadrilàter $ABCD$.



Qüestions de 4 punts

11. D. 20.

Si d és la distància que ens demanen, quan es perd el contacte per ràdio s'ha recorregut $\frac{d}{4}$ i el que manca per ecoòrrer és $\frac{3d}{4}=2^{18}+2^{19}=2^{18}\cdot(1+2)=3\cdot 2^{18}$ i d'aci es dedueix $d=4\cdot 2^{18}=2^{20}$.

12. E. El que diu l'enunciat no és possible..

Si indiquem com x el nombre de la primera fila i la primera columna, aleshores a la casella central hi ha d'anar $3-x$ i a la casella de la tercera fila primera columna hi ha d'anar $-2+x$. No pot ser que aquests tres nombres, x, $3-x$ i $-2+x$ siguin enters i positius.

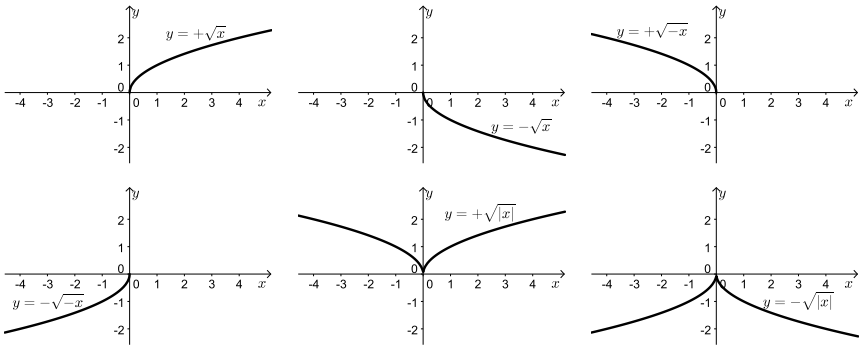
13. B. 21.

Els 10 xiquets que tenen un germà pertanyen a 5 famílies; els 6 xiquets que tenen dos germans seran de 2 famílies diferents; finalment els 8 xiquets que tenen 3 germans seran de 2 altres famílies. Fins aquí hem comptat 24 nens dels 36 components del grup; els 12 restants són tots de famílies diferents. El nombre total de famílies és doncs $5+2+2+12=21$.

14. D. 6.

Com que l'eix de les x és horitzontal, veiem de seguida que no hi ha cap de les dues paràboles que són la gràfica de les funcions $y = x^2$ i $y = -x^2$.

Tot seguit podeu veure que les gràfiques de les altres funcions sí que hi són.



15. B. Berta.

És clar que Ariadna, que fa salts de 70 cm, a la primera volta caurà a la rasa.

Com que la longitud de la pista, és a dir 40000 cm, és un múltiple de 80 cm, resulta que si la rasa està col·locada en un lloc que fa que la Berta la salti a la primera volta ja la saltarà sempre.

Pel que fa a la Carla, per saltar la rasa a la primera volta ha de quedar-hi a una distància d'entre 0 i 10 cm; com que el residu de dividir 40000 per 85 dóna 50, a la segona volta hi quedarà entre 50 i 60 cm, i a la tercera farà un bot que acabarà entre 100 i 110 cm i per tant en el següent bot quedarà entre 15 i 25 cm i en l'altre caurà a la rasa.

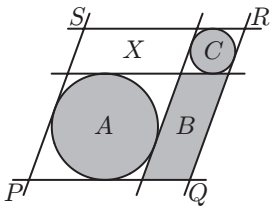
La Diana en la primera volta ha de quedar entre 0 i 15 cm de la rasa i com que si dividim 40000 per 90 dóna 40 de residu, a la segona volta hi quedarà entre 40 i 55 cm i tot seguit hi caurà.

També l'Eugènia haurà caigut a la rasa. El residu de 40000 dividit per 95 dóna 5. Abans de caure-hi, quedarà de la rasa entre 0 i 20 cm, entre 5 i 25,... , entre 25 i 30 (a la sisena volta) i aleshores ja hi caurà segur.

És a dir, si una xiqueta ha arribat al final de la cursa després de fer 10 voltes, només pot ser la Berta.

16. C. B.

Si un paral·lelogram té un cercle inscrit, el paral·lelogram és un rombe. A partir d'aquest fet es dedueix que el paral·lelogram d'àrea B i el paral·lelogram d'àrea X són iguals. Per tant, quan coneixem B ja coneixem X. Les àrees A i C no determinen ni B ni X.



17. B. 9.

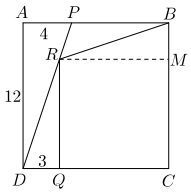
Per a cada fila, el nombre de cel·les roges de la fila és més gran que el de cel·les blaves, i per a cada columna, el nombre total de cel·les blaves de la columna és més gran que el de cel·les roges. Sumant per files i per columnes els nombres de cel·les roges i blaves, açò força que el nombre total de cel·les roges i el nombre total de cel·les blaves han de coincidir. Per tant el nombre de cel·les verdes és senar i com que ha de ser més petit que el de cel·les roges (o blaves) no pot superar $81/3 = 27$: serà un nombre senar entre 9 i 27.
Però com que l'enunciat pregunta pel mínim valor possible del nombre de cel·les verdes, si trobem una configuració que en té 9 ja haurem acabat. Ho compleix la que té boles verdes a la diagonal i la disposició de les boles per files és, ordenadament, la següent: VRBRBRBRB, BVRBRBRBR, RBVRBRBRB, BRBVRBRBR, RBRBVRBRB, BRBRBVRBR, RBRBRBVRB, BRBRBRBVR, RBRBRBRBV

18. D. $c < 0$.

A partir d'una anàlisi acurada de la figura de l'enunciat, que mostra un fragment de la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$ deduïm que:
• La paràbola té un màxim i, per tant, $a < 0$
• L'abscissa del vèrtex $v = \dfrac{-b}{2a} < -1$ i, com que ja sabem que $a < 0$ veiem que ha de ser $b < 0$.
• Com que l'ordenada del màxim és positiva, la funció té dues arrels reals i, per tant, el discriminant és positiu: $b^2 > 4ac$.
• Es compleix $f(-1) = a - b + c = 10 < 0$.
• En canvi pot ser $c < 0$, $c = 0$ o bé $c > 0$ segons que l'arrel de la funció que queda més a la dreta sigui positiva, zero o negativa.
Exemples: $y = -x^2 - 6x + 5$, $y = -x^2 - 11x$ i $y = -x^2 - 16x - 5$.

19. A. $3\sqrt{10}$.

Els triangles APD i QDR són semblants. Aleshores $\dfrac{RQ}{12} = \dfrac{3}{4}$ d'on $RQ = 9$. Per tant, el triangle rectangle MBR té el catets $MR = 12 - 3 = 9$ i $MB = 12 - 9 = 3$ i la hipotenusa n'és $BR = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.



20. D. 7.

Posem que al club hi ha H homes i D dones. Com que en Bru i l'Andreu són del club, $H \geq 2$. Com que tots, excepte 5 membres, són homes ha de ser $D = 5$. Finalment, com que a cada equip de 6 membres que es pugui formar hi ha, com a mínim, 4 dones ha de ser exactament $H = 2$, ja que si fos $H \geq 3$ ja podríem formar un equip de 3 homes i 3 dones, contra el que estableix l'enunciat. Per tant $H = 2$ i $D = 5$.

Qüestions de 5 punts

21. E. 50.

La mínima quantitat possible de boles a la bossa s'obtindrà quan no n'hi hagi cap més que les que indica l'enunciat. Com que els múltiples de 30 també ho són alhora de 5 i de 6 és segur que hi ha com a mínim $40 + 30 - 20$ nombres. Els múltiples de 30 constitueixen la intersecció del conjunt de múltiples de 5 i el conjunt de múltiples de 6 i els hem de restar de la quantitat total perquè en fer $40 + 30$ els havíem comptat dues vegades.

22. C. 12.

És sabut que la suma dels k primers nombres enters positius imparells és k^2. En efecte: $1 + 3 + (2k - 1) = \dfrac{(1 + 2k - 1)k}{2} = k^2$.

Per tant la hipotenusa fa 13 unitats i els catets, m i n , enters positius amb $m < n < 13$. Ara bé, com que $13 < m + n < 2n$ serà $7 \leq n < 13$. L'única solució de $m^2 + n^2 = 13$ en aquest interval de nombres enters la dóna la coneguda terna pitagòrica (5, 12, 13) i resulta $n = 12$.

23. D. 2011.

A partir de $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ podem obtenir successivament

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x}, f_3(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

i, doncs, la successió de funcions té cicle 3.
Com que el residu de la divisió de 2011 per 3 és 1 resulta que $f_{2011}(x) = f_1(x) = x$ i, per tant, $f_{2011}(2011) = 2011$.

24. E. Mai no tornen a canviar l'hora a la de la mitjanit.

A les 0 h canvien el rellotge a la 1 h; a la 1 h marca 2 h i com que arriben 2 donyetes el canvien a les 4 h; a les 2 h marca 5 h i canvien al rellotge a les 8 h. A cada hora en punt, l'hora que passarà a marcar el rellotge després del canvi serà la suma de l'hora real i les hores avançades per les donyetes. Per canviar l'hora a la de la mitjanit en algun moment, aquesta suma ha de ser un múltiple de 24. Si això ha de passar en el moment que s'han aplegat n donyetes a l'habitació l'hora real seran les $n-1$ hores i el nombre d'hores avançades serà $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Hauria de ser, doncs, $n - 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2} = 24k$ i també $n^2 - 3n + 2 = 48k$, però $n^2 - 3n + 2$ no és mai múltiple de 48 perquè no és mai múltiple de 3. Per provar-ho basta substituir en $N = n^2 - 3n + 2$, $n = 3a$ i veurem que N resulta un múltiple de 3 menys 2; $n = 3a - 1$ i aleshores N és un múltiple de 3 més 1; $n = 3a + 1$ i N és un múltiple de 3 meyns 1. Per tant N no és mai múltiple de 3.

25. B. 30.

Si x és el pes màxim sense cost i t és la taxa per quilo extra, l'enunciat es tradueix així:

$$\begin{cases} (80 - 2x) \cdot t = 40 \\ (80 - x) \cdot t = 199 \end{cases}$$

Si resolem el sistema d'equacions resulta $x = 30$.

26. A. 2.

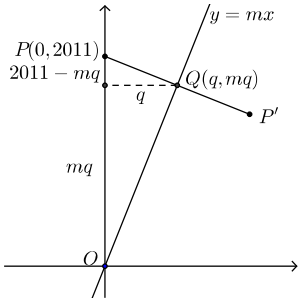
Comencem per observar que la C no influeix en el resultat de l'expressió perquè se simplifica. Si volem obtenir el mínim valor hem de pensar que J i O prenguin els màxims valors possibles, 8 i 9. Tanmateix hem de vore si aixina es pot complir el que diu l'enunciat, que el resultat sigui enter i, alhora, fent servir els nombres més petits possible per al numerador. Com que un 5 al numerador no es podria simplificar per tal que el resultat fos enter, haurem de prendre $\{A, N, G, U, R\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ i el resultat de l'expressió de l'enunciat és 2.

27. A. 1.

Posem $P(0, 2011)$, P' el simètric de P respecte la recta $y = mx$ i $Q(q, mq)$ el punt mitjà del segment PP'. Les coordenades de P' són $(2q, 2mq - 2011)$. Si apliquem el teorema de l'altura en el triangle rectangle OPQ trobem $q^2 = mq(2011 - mq)$.

D'ací se'n dedueix $q = \dfrac{2011m}{1 + m^2}$ i

$$P' = (\frac{2011 \cdot 2m}{m^2 + 1}, \frac{2011 \cdot (m^2 - 1)}{m^2 + 1}).$$



Perquè les coordenades siguen enteres, caldrà que $m^2 + 1$ dividisca $m^2 - 1$ ja que 2011 és un nombre primer, però com que $m^2 + 1 > m^2 - 1$ i ha de ser $m \geq 1$ només serà possible que $m^2 + 1$ sigui divisor de $m^2 - 1$ si $m^2 - 1 = 0$. Serà $m = 1$, que també divideix $2m$ Aquesta única recta correspon a la bisectriu dels quadrants 1r i 3r i el simètric de (0,2011) és (2011,0).

28. C. $c < b < a$.

Els tres nombres de l'enunciat, $a = \log_3 5$, $b = \log_5 7$ i $c = \log_7 9$ són els valors de la funció $f(x) = \log_x x + 2 = \dfrac{\ln x + 2}{\ln x})$ per a $x = 3, 5, 7$.

La funció f és decreixent. Per veure-ho calculem i operem i obtenim $f'(x) = \dfrac{x \ln x - (x + 2) \ln(x + 2)}{x(x + 2)(\ln(x + 2))^2} < 0$ a partir del fet que la funció ln és creixent. Per tant $f(3) > f(5) > f(7)$ és a dir $a > b > c$.

29. B. $\dfrac{2}{2012}$.

A partir de la condició que imposa l'enunciat podem deduir una fórmula recurrent per a la funció f. Com que serà

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

obtenim $(n-1)^2 f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$ i d'ací $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1} f(n-1)$.

Es pot observar aleshores que $f(2) = \dfrac{2011}{3}$, $f(3) = \dfrac{2 \cdot 2011}{4 \cdot 3}$, $f(4) = \dfrac{2 \cdot 2011}{5 \cdot 4}$ i així successivament $f(n) = \dfrac{2 \cdot 2011}{n(n+1)}$, cosa que podem provar per inducció.

Suposat que és cert per a $n-1$, és a dir $f(n-1) = \dfrac{2 \cdot 2011}{(n-1)n}$ aleshores per la recurrència tenim que $f(n) = \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{2 \cdot 2011}{(n-1)n}$ i, si simplifiquem, obtenim efectivament $f(n) = \dfrac{2 \cdot 2011}{n(n+1)}$.

Per tant $f(2011) = \dfrac{2 \cdot 2011}{2011 \cdot 2012} = \dfrac{2}{2012}$.

30. B. 1.

Com que a i b són nombres enters, la suma $a^2 + b^2$ pot prendre com a valors, a priori, els nombres enters positius i el 0.

Vegem que no pot prendre el valor 0. En efecte, si fos $a^2 + b^2 = 0$ hauria de ser $a = x + y + z = 0$ i $b = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + xz + yz}{xyz} = 0 \Rightarrow xy + xz + yz = 0$.

Com que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$ es deduïria que $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$, cosa que contradiu l'enunciat.

Vegem ara que sí que pot ser $a^2 + b^2 = 1$. Haurà de ser un dels dos sumands igual a 1 i l'altre a 0; no és cap restricció suposar $a = 0, b = 1$. Comprovarem que es pot aconseguir amb $x = y$. Haurà de ser $2x + z = 0$ i $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{z} = 1$. Si es resol el sistema podem comprovar que $x = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{2}{3}, z = -3$ donen solució al problema plantejat.