Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 3

Qüestions de 3 punts

1. B. 7,5 m.

Si hi ha 8 franges blanques hi haurà 7 franges negres. L'amplada total que abasten les 15 franges serà: $15 \times 50 = 750$ cm = 7,5 m.

2. C. 26 cm^2.

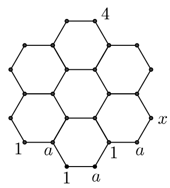
L'àrea del rectangle és AB multiplicat per l'altura del rectangle.
Com que AB és la paral·lela mitjana del trapezi, la seva longitud és la semisuma de les bases del trapezi i l'altura del trapezi és el doble de l'altura del rectangle. Per tant l'àrea del trapezi és el doble de l'àrea del rectangle.

3. D. $S_3 < S_2 < S_1$.

Si comparem els sumands, ordenadament els de S_3, S_2, S_1, veiem que $1 \cdot 2 < 2 \cdot 2 < 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 < 3 \cdot 3 < 3 \cdot 4$ i $3 \cdot 4 < 4 \cdot 4 < 4 \cdot 5$ i per tant tenim $S_3 < S_2 < S_1$.

4. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



5. E. No és possible obtenir aquest residu..

Si el divisor fos 2011 i el residu 1011, el producte del divisor pel quocient hauria de ser 1000 i, doncs, el divisor seria més petit o igual que 1000 i aleshores el residu no pot ser mai 1011.

6. C. 9.

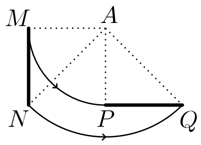
Si considerem que una peça fa x cm de costat tindrem que $360 = 24 \cdot 5 \cdot x$, per tant $x = 3$ cm i la peça fa 9 cm^2 d'àrea.

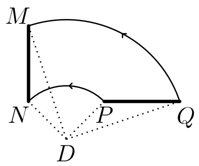
7. D. novena.

Els nombres amb 4 xifres que sumen 4 poden estar formats per les xifres 4000, o bé 3100, o bé 2200, o bé 2110, o bé 1111, en els diferents ordres possibles. La llista comença amb el 4000, segueix amb els tres que comencen per 3 (3100, 3010, 3001), i a continuació ja venen els que comencen per 2, en aquest ordre 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002. El 2011 és el 9è.

8. A. *A* i *D*.

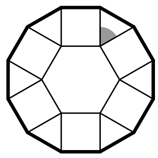
El punt A és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma MN en PQ. El punt D és el centre d'una rotació de 90° en sentit horari que transforma MN en QP. C no pot ser el centre d'una rotació que transformi un segment en un altre perquè no és a la mateixa distància de cap parella dels extrems dels segments. Com que les distàncies de B a M i N són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ i les distàncies a P i Q són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{10}$ tampoc no pot ser el centre de cap rotació que transformi un segment en un altre.





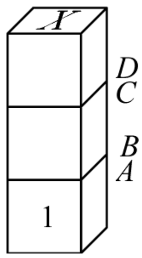
9. C. 12.

En un vèrtex de l'hexàgon concorren dos quadrats i un triangle. L'angle interior de l'hexàgon mesura 120° i per tant l'angle del triangle és $360° - 120° - 2 \cdot 90° = 60°$. Per tant el triangle és equilàter i el dodecàgon és regular amb un perímetre de 12 unitats.



10. E. 6.

A les cares adossades A, B, C i D no hi poden anar ni el 5 ni el 6 perquè $A + B = 5$ i $C + D = 5$. Aleshores no pot ser $A = 1$ (és a la cara vista), ni $A = 4$, perquè seria $B = 1$ (per sumar 5) i a C, oposada a B hi hauria un 6. Si a A hi hagués un 3, seria $B = 2$ (per sumar 5) i a C hi hauria un 5, cosa que no pot ser. Per tant $A = 2$, $B = 3$ (per sumar 5), $C = 4$ (oposada a B), $D = 1$ (per sumar 5) i la seva oposada serà $X = 6$.



Qüestions de 4 punts

11. B. Exactament, quatre dissabtes.

Perquè succeeixi el que diu l'enunciat el mes ha de ser de 31 dies i ha de començar en dilluns, perquè aleshores tindrà quatre setmanes senceres més els dies 29, 30 i 31 que seran dilluns, dimarts i dimecres. Per tant, el mes anterior acaba en diumenge i, si només té quatre diumenges, ha de ser forçosament el mes de febrer (d'un any que no sigui de traspàs). Per tant el mes següent al de l'enunciat és el mes de març, que comença en dijous i tindrà cinc dijous, cinc divendres (el cinquè el dia 30), quatre dissabtes i quatre diumenges.

12. B. Agnès, Hana, Isabel.

Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Hana; en canvi l'Agnès i la Hana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Hana al final les posicions seran Agnès-Hana-Isabel.

13. A. 1005.

$9^n + 9^n + 9^n = 3 \cdot 9^n = 3 \cdot \left(3^2\right)^n = 3 \cdot 3^{2n} = 3^{2n+1}$.
Si ha de ser $3^{2n+1} = 3^{2011}$ tenim $2n + 1 = 2011$ i per tant $n = 1005$.

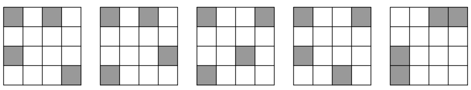
14. E. 512 L.

El volum del cub gros és $V = (a+1)^3$ i el del cub menut $v = a^3$. Si aboquem aigua del cub gros per omplir el menut al cub gros quedaran $V - v = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ litres i al cub menut hi haurà $v = a^3$ litres. Si $3a^2 + 3a + 1 = 217$ aleshores $a = 8$ i al cub menut hi ha $8^3 = 512$ litres.

15. E. 45.

El centre de l'esfera, que és el baricentre del triangle equilàter, determina sobre l'altura del triangle dos segments de manera que el petit, és a dir el radi de l'esfera, és $\frac{1}{3}$ de l'altura. Per tant la profunditat serà el triple del radi, o sigui 45 cm.

16. D. 5.



17. D. 111.

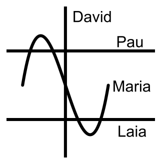
Segur que haurem de triar tots els d'una centena que comenci amb xifra senar, N. Així del $N00$ al $N99$ ja tenim 100 nombres consecutius amb xifra senar, però el nombre següent ja no en té. De la centena anterior tenen xifra senar i enllacen amb els que ja hem dit, posant $A = N - 1$, des del $A89$ fins al $A99$. En total 111 nombres, per exemple des del 289 fins al 399.

18. A. 10.

Hi ha quatre quadrats de 2×2. Si sumem les xifres dels quatre quadrats el total serà 40. Haurem comptat una vegada els números 1, 2, 4, 5, quatre vegades el 2 central i dues vegades cadascun dels altres nombres. Per tant, si s és la suma que busquem tindrem $40 = 12 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot s$ i, per tant, $s = 10$.

19. C. La Maria.

L'avinguda on viu la Maria talla dos cops al carrer d'en Pau, un cop al carrer d'en David i dos cops al carrer de la Laia i, doncs, forçosament aquesta ha de ser l'avinguda Corba. Si mireu els altres talls constatareu que l'esquema correcte seria com el que teniu a la dreta.



20. E. $\dfrac{x}{y-1}$.

Els cinc valors de les opcions de resposta es poden escriure com

$$\frac{6x}{6y+6}, \frac{6x}{6y+2}, \frac{6x}{6y+3}, \frac{6x}{6y-3}, \frac{6x}{6y-6}.$$

Com que són fraccions de numerador i denominador positiu, que tenen el mateix numerador, la més gran serà la que tingui el denominador més petit, és a dir l'última, $\dfrac{x}{y-1}$

Qüestions de 5 punts

21. C. 225.

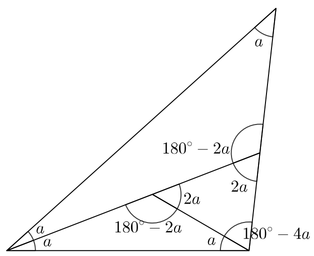
La part negra d'una cara del cub està formada pel quadrat central sencer i quatre meitats, en total tres quadrats negres. La part blanca està formada per quatre quadrats sencers i els quatre quarts de les cantonades, en total cinc quadrats blancs. Per tant en cada cara la part negra representa les 3/8 parts del total i, com que totes les cares són iguals, la part negra serà 3/8 dels 600 cm^2 de les sis cares del cub, 225 cm^2 .

22. C. 168.

Les xifres b, c, d, e del nombre $\overline{abcde}$ han de ser diferents i no sumar més de 9 ja que aquesta suma serà la xifra a. Hi ha set grups de quatre xifres diferents que no sumen més de 9, a saber 0123, 0124, 0125, 0126, 0134, 0135, 0234 i cada grup de 4 xifres es pot ordenar de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneres diferents. Per tant en total hi ha $7 \cdot 24 = 168$ *nombres interessants* diferents.

23. B. 3.

Segur que el nostre company ha pensat que aniria bé que tots tres triangles en què es descompon el triangle ABC fossin isòsceles; d'aquesta manera el nombre d'angles diferents segur que es redueix. A la dreta teniu una figura que ho concreta. Posem a als dos angles de "la base de baix"; l'altre angle d'aquell triangle serà $180° - 2a$ i el seu adjacent suplementari, $2a$. Perquè el triangle de la dreta sigui isòsceles hi haurà un altre $2a$ i un $180° - 4a$.

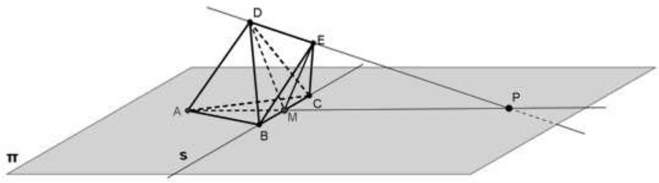


En el triangle de dalt tenim $180° - 2a$, suplementari d'un angle de $2a$. Perquè sigui isòsceles els altres angles han de ser iguals a a. Entre els angles que apareixen, a, $2a$, $180° - 2a$, $180° - 4a$ pot ser que només n'hi hagi tres de diferents posant $180° - 4a = 2a$, d'on $a = 30°$ i els angles que apareixen a la figura són de 30°, 60° i 120°. Si fem $180° - 4a = a$ també apareixen només tres angles diferents, 36°, 72° i 108°.

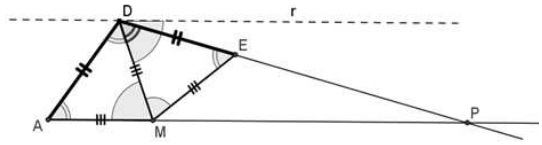
En cap cas pot ser que només hi hagi dues mesures diferents per als angles. Com que $a > 0$ serà $a \neq 2a$; aquests dos valors haurien de ser iguals a $180° - 4a$ i a $180° - 2a$, cosa que no pot ser.

24. A. En el semiplà on no és A.

Vegeu aquesta figura que representa l'enunciat



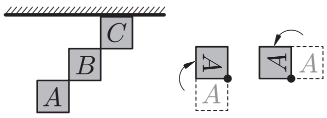
Si considerem el pla π que conté els vèrtexs A, D i E, tindrem la secció següent perpendicular al pla π:



En aquesta secció tenim dos triangles isòsceles iguals amb els costats AD i DE arestes dels tetràedres, i els altres costats, concurrents en M, altures de les cares dels tetràedres i per tant de longitud més petita que les arestes. Amb això tenim que l'angle AMD és més gran que el MDE i per tant, si ens fixem en la recta r paral·lela a AM per D, la recta DE tallarà la recta AM en un punt P situat en el semiplà que no conté A.

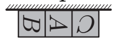
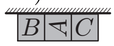
25. B.

Posem coordenades, de manera que els centres de les caixes siguin els (i, j) enters. Fixem-nos en la paritat del valor $i + j$. Quan girem una caixa, la passem del seu lloc (i, j) a una de les 4 caselles del costat (amb costat comú): $(i-1, j)$,$(i+1, j)$, si l'hem moguda lateralment o bé $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ si l'hem moguda amunt o avall.



En qualsevol dels quatre girs anteriors la paritat de la suma de coordenades canvia.

Observem també que en un sol moviment podem girar les caixes o bé 90° o bé 270°, és a dir, les lletres quedaran apaisades, cap a la dreta o cap a l'esquerra. Això passarà també en qualsevol moviment d'un nombre senar de passos. Els moviments d'un nombre parell de passos deixaran les lletres cap amunt o cap avall, girs de 180° o de 360°, però no apaisades.

Suposem que la posició inicial de les caixes és d'una paritat concreta, per exemple, parell. Observem que en la resposta A)  hem d'haver fet un nombre senar de passos per la caixa A i també un nombre senar per la B. Això és impossible ja que A i B estan en caselles de paritat diferent.
Anàlogament es raona en els casos C) (senar, senar, parell) i D) (parell, parell, parell).
El cas B)  és possible fent una rotació de 90° (sentit horari) de la caixa A sobre el vèrtex superior dret i després una rotació de 180° (sentit antihorari) sobre el nou vèrtex superior dret. La lletra B s'ha de rotar 90° (s.h.) sobre el vèrtex superior esquerre i tot seguit 90° més (s.a.) sobre el nou vèrtex superior esquerre.

---

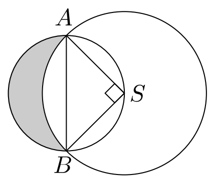
26. D. 3.
Si de l'equació $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ aïllem y obtenim $y=\dfrac{3x}{x-3}=3+\dfrac{9}{x-3}$. Si y ha de ser enter, $x-3$ ha de ser un divisor de 9. Com que a més ha de ser $y>0$ això dóna les solucions $x-3=1, x=4, y=12$, $x-3=3, x=6, y=6$ i $x-3=9, x=12, y=4$.

---

27. B. 1.
Si $k=1$ tenim $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2\rangle+\langle 3\rangle=2+3=5$ i $\langle 2k+3>=\langle 5\rangle=5$ i per tant se satisfà l'equació.
Si $k>1$ els nombres primers $\langle k+1\rangle$ i $\langle k+2\rangle$ seran més grans que 2 i per tant imparells. La seva suma donarà un nombre parell que no podrà ser el primer $\langle 2k+3\rangle$ perquè és un nombre imparell.
Per tant només un nombre satisfà l'equació de l'enunciat.

---

28. A. $\dfrac{r^2}{2}$.
L'angle indicat en S és recte, perquè és un angle inscrit en la circumferència petita que abasta mitja circumferència. Per tant, l'àrea del sector circular determinat per l'arc AB en el cercle gran és una quarta part de l'àrea del cercle, $A_s=\dfrac{\pi r^2}{4}$.

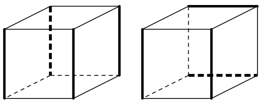


El triangle ASB es rectangle isòsceles amb els dos catets iguals a r i per tant té àrea $A_t=\dfrac{r^2}{2}$. L'àrea del segment circular corresponent serà la del sector circular menys la del triangle: $A_{sg}=\dfrac{\pi r^2}{4}-\dfrac{r^2}{2}$.

El triangle ASB és rectangle isòsceles amb els dos catets iguals a r i per tant té àrea $A_t = \frac{r^2}{2}$. L'àrea del segment circular corresponent a aquest sector (sector circular − triangle) serà $A_{sg} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.
Finalment, l'àrea de la lúnula que busquem és la meitat de l'àrea del cercle petit menys l'àrea del segment circular que hem trobat. Anomenant d el diàmetre del cercle petit i aplicant el teorema de Pitàgores al triangle ASB trobem que $d = r\sqrt{2}$ i per tant el radi del cercle petit és $\frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$ i l'àrea del cercle petit és $A_c = \frac{\pi r^2}{2}$. Així doncs l'àrea de la lúnula és $A = \frac{1}{2}A_c - A_{sg} = \frac{\pi r^2}{4} - (\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}) = \frac{r^2}{2}$.

29. C. 9.

Hi ha dues possibilitats a considerar, que les quatre arestes siguin paral·leles o que no ho siguin.

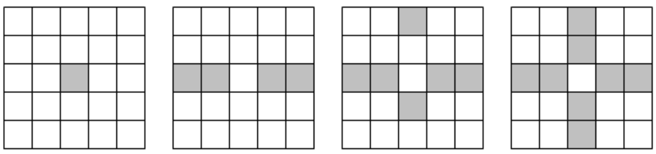


• Hi ha 3 conjunts de quatre arestes paral·leles, en les tres direccions que determinen les arestes del cub.

• Hi ha 6 conjunts de quatre arestes que són paral·leles per parelles. Una parella d'aquestes arestes determina una cara (així doncs, 6 possibilitats) i l'altra queda situada en la cara opsada a l'anterior.

30. E. Qualsevol dels valors és possible.

La figura mostra situacions que indiquen que qualsevol valor de n, $(0 < n < 9)$ és possible. El primer esquema justifica $n = 1$ i $n = 8$; el segon justifica $n = 2$ i $n = 7$. El tercer serveix per demostrar-ho en els casos $n = 3$ i $n = 6$ i l'últim per $n = 4$ i $n = 5$.



Cangur SCM 2011 (17 març) Nivell 3

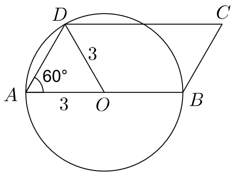
Qüestions de 3 punts

1. C. 10,2 m.

Si hi ha 9 franges blanques hi haurà 8 franges negres. L'amplada total que abasten les 17 franges serà: $17 \times 60 = 1020$ cm $= 10{,}2$ m.

2. E. $9\sqrt{3}$.

El triangle de la figura és equilàter. La seua altura, que és la del paral·lelogram, és $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Per tant, l'àrea del paral·lelogram serà $6 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm^2.

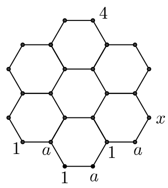


3. A. $S_3 < S_2 < S_1$.

Si comparem els sumands, ordenadament els de S_3, S_2, S_1, veiem que $1\cdot 2 < 2\cdot 2 < 2\cdot 3$, $2\cdot 3 < 3\cdot 3 < 3\cdot 4$ i $3\cdot 4 < 4\cdot 4 < 4\cdot 5$ i per tant tenim $S_3 < S_2 < S_1$.

4. A. 1.

Vegeu a la figura de la dreta que x ha de ser necessàriament $x = 1$. Podeu veure, doncs, que no ens cal el 4 per saber el valor de x; això sí, amb el 4 podem deduir que la suma de cada segment és 5.



5. D. 2012.

Podem expressar $3^{2011}+203 = 3\cdot 3^{2010} - 3\cdot 603 + 203 = 3\left(3^{2010} - 603\right) + 2012$ i atenent a la fórmula d ela divisió euclidiana $D = d\cdot q + r$, el residu és 2012.

6. D. 16.

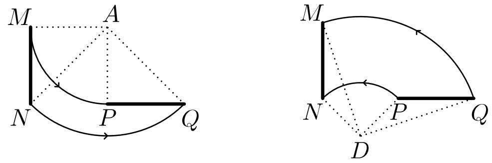
Si considerem que una peça fa x cm de costat tindrem que $960 = 40 \cdot 6 \cdot x$, per tant $x = 4$ cm i la peça fa 16 cm^2 d'àrea.

7. E. 1098.

El primer nombre de la llista és el 1012 i l'últim és el 2110. La diferència és $2110 - 1012 = 1098$.

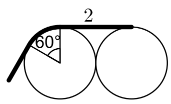
8. C. A **i** D.

El punt A és el centre d'una rotació de 90° en sentit antihorari que transforma MN en PQ. El punt D és el centre d'una rotació de 90° en sentit horari que transforma MN en QP. C no pot ser el centre d'una rotació que transformi un segment en un altre perquè no és a la mateixa distància de cap parella dels extrems dels segments. Com que les distàncies de B a M i N són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$ i les distàncies a P i Q són $\sqrt{2}$ i $\sqrt{10}$ tampoc no pot ser el centre de cap rotació que transformi un segment en un altre.



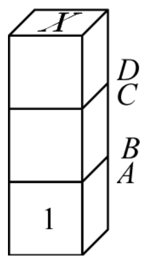
9. E. $12 + 2\pi$.

La figura mostra que la sisena part de la longitud del cordó està formada per un segment de 2 unitats (igual a dos radis) més un arc de 60° d'una de les circumferències, que tindrà doncs una longitud de $\frac{2\pi}{6}$. La longitud total del cordó serà $L = 6\left(2 + \frac{2\pi}{6}\right) = 12 + 2\pi$.



10. D. 6.

A les cares adossades A, B, C i D no hi poden anar ni el 5 ni el 6 perquè $A + B = 5$ i $C + D = 5$. Aleshores no pot ser $A = 1$ (és a la cara vista), ni $A = 4$, perquè seria $B = 1$ (per sumar 5) i a C, oposada a B hi hauria un 6. Si a A hi hagués un 3, seria $B = 2$ (per sumar 5) i a C hi hauria un 5, cosa que no pot ser. Per tant $A = 2$, $B = 3$ (per sumar 5), $C = 4$ (oposada a B), $D = 1$ (per sumar 5) i la seva oposada serà $X = 6$.



Qüestions de 4 punts

11. B. Les persones dels pobles B i C anaven en el mateix autobús..

La distribució per pobles és:

A	B	C	D	E	F	G	**TOTAL**
7	6	5	4	3	2	1	**28**

És a dir, aniran 14 a cada autobús. Donat que en el primer ja van els del poble A (que són 7) i han d'anar-hi de tres pobles més, l'única terna que suma 7 és $D+F+G=4+2+1=7$. És a dir que a l'autobús 1 hi aniran els de A, els de D, els de F i la professora que vé de G. L'única afirmació certa serà, aleshores, la B).

12. D. Agnès, Joana, Isabel.

Si la Isabel i l'Agnès es van avançar 9 vegades van intercanviar les seves posicions; això mateix succeeix amb la Isabel i la Joana; en canvi l'Agnès i la Joana, com que es van avançar 10 vegades van arribar en el mateix ordre que estaven just després de la sortida. Si aleshores anaven Isabel-Agnès-Joana al final les posicions seran Agnès-Joana-Isabel.

13. B. $\dfrac{2009}{3}$.

$8^x+8^x+8^x+8^x=4\cdot 8^x=4\cdot\left(2^3\right)^x=2^2\cdot 2^{3x}=2^{3x+2}$.

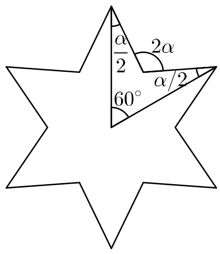
Si ha de ser $2^{3x+2}=2^{2011}$ tenim $3x+2=2011$ i per tant $x=\dfrac{2009}{3}$.

14. E. 729 litres.

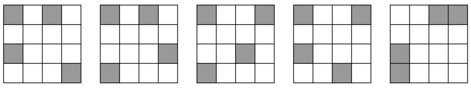
El volum del cub gros és $V=(a+1)^3$ i el del cub menut $v=a^3$. Si aboquem aigua del cub gros per omplir el menut al cub gros quedaran $V-v=(a+1)^3-a^3=3a^2+3a+1$ litres i al cub menut hi haurà $v=a^3$ litres. Si $3a^2+3a+1=271$ aleshores $a=9$ i al cub menut hi ha $9^3=729$ litres.

15. D. 60°.

En el quadrilàter de la figura hem deduït tres angle sinteriors per la simetrioa de la figura i ja hem posat que l'angle exterior és $\beta=2\alpha$. Els angles del quadrilàter sumen $360^\circ=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\alpha}{2}+60^\circ+(360^\circ-2\alpha)$ i d'ací es dedueix $\alpha=60^\circ$.



16. B. 5.



17. C. 1111.

Segur que haurem de triar tots els d'un miler que comenci amb xifra parella, N. Així del $N000$ al $N999$ ja tenim 1000 nombres consecutius amb una xifra parella. El nombre anterior a aquest miler no en tindrà. si passem al miler següent tenen xifra parella i enllacen amb els que ja hem dit, posant $A = N + 1$, des del $A000$ fins al $A099$ que tenen el 0, però podem continuar amb $A100$ fins al $A110$. El següent, el $A111$ ja no tindrà xifra parella. En total són 1111 nombres, per exemple des del 4000 fins al 5110.

18. B. $\frac{1}{3}$.

Possiblement la manera més ràpida de trobar la probabilitat dels resultats que poden aparèixer quan fem la suma de les puntuacions dels dos daus és amb una taula de doble entrada. D'esta manera observem 36 situacions equiprobables, de les quals el 5 és el valor que apareix més, 12 vegades. La probabilitat d'obtenir un 5 és, doncs, $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

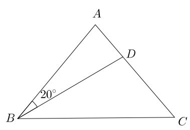
	5	4	4	1	1	1
5	10	9	9	6	6	6
4	9	8	8	5	5	5
4	9	8	8	5	5	5
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2
1	6	5	5	2	2	2

19. B..

La vista que no és possible és la B) perquè quedarien dos trossos de cordó desconnectats. Totes les altres vistes sí que són possibles.

20. B. $50°$.

Com que $BD = AC = AB$ el triangle ABD també serà isòsceles i els angles $\widehat{BAD} = \widehat{BDA} = 80°$ i aleshores, com que el triangle ABC és isòsceles i els altres dos angles han de ser iguals $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 50°$.



Qüestions de 5 punts

21. A. $\dfrac{36}{5}$.

Si a és el catet que la longitud és la mitjana dels altres dos costats, podem representar-los $a-h$, a i $a+h$. Si apliquem el teorema de Pitàgores tindrem $(a+h)^2 = a^2 + (a+h)^2$ d'on es dedueix $a = 4h$, els catets esdevenen $3h$, $4h$ i la hipotenusa $5h$. L'àrea és $54 = \dfrac{3h \cdot 4h}{2}$ d'on resulta $h = 3$. La hipotenusa és $5h = 15$, i si designem com x l'altura sobre la hipotenusa, l'àrea també es pot calcular $54 = \dfrac{15x}{2}$ i per tant $x = \dfrac{108}{15} = \dfrac{36}{5}$.

22. A. 168.

Les xifres b, c, d, e del nombre $\overline{abcde}$ han de ser diferents i no sumar més de 9 ja que aquesta suma serà la xifra a. Hi ha set grups de quatre xifres diferents que no sumen més de 9, a saber 0123, 0124, 0125, 0126, 0134, 0135, 0234 i cada grup de 4 xifres es pot ordenar de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneres diferents. Per tant en total hi ha $7 \cdot 24 = 168$ *nombres interessants* diferents.

23. E. $\dfrac{y-1}{x}$.

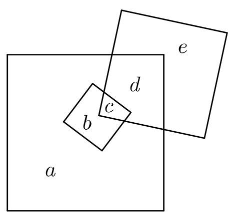
Si reduïm a comú denominador $6x$ les cinc fraccions de l'enunciat obtenim

$$\frac{6y+3}{6x}, \frac{6y-3}{6x}, \frac{6y+2}{6x}, \frac{6y+6}{6x}, \frac{6y-6}{6x}.$$

Com que són fraccions de denominador positiu la més menuda serà la que té el numerador més menut que, evidentment, és aquesta última que és igual a $\dfrac{y-1}{x}$.

24. C. 15 cm^2.

Si indiquem amb a, b, c, d, e les àrees de les cinc regions de la figura podem comprovar que $a + b + c + d = 49(*)$, que $b + c = 9(**)$ i que $c + d + e = 25(***)$. Si restem de l'equació (*) la suma de (**)+(***) obtenim $a - (c + e) = 15$ i això és el que demanava l'enunciat.

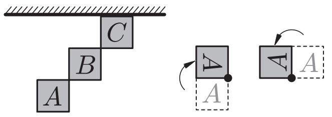


25. E. 4.

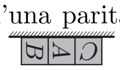
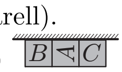
Donat que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ té $2 \cdot 2 \cdot 2$ divisors. Per altra banda $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 105$. Per cada parella de divisors a, b de 105 "complementaris", és a dir que $a \cdot b = 105$ amb $a > b$, podrem trobar x, y enters positius que compleixin $x + y = a$ i $x - y = b$? Com que la solució d'aquest sistema és $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = a - b2$ perquè x, y siguin enters positius és necessari i suficient que a i b siguin de la mateixa paritat. Com que en el cas del 105 tots els divisors són imparells, hi haurà 4 parelles de divisors vàlides i 4 parells (x, y).

---

26. D.



Posem coordenades, de manera que els centres de les caixes siguin els (i, j) enters. Fixem-nos en la paritat del valor $i + j$. Quan girem una caixa, la passem del seu lloc (i, j) a una de les 4 caselles del costat (amb costat comú): $(i-1, j)$,$(i+1, j)$, si l'hem moguda lateralment o bé $(i, j-1)$, $(i, j+1)$ si l'hem moguda amunt o avall.
En qualsevol dels quatre girs anteriors la paritat de la suma de coordenades canvia.
Observem també que en un sol moviment podem girar les caixes o bé 90° o bé 270°, és a dir, les lletres quedaran apaisades, cap a la dreta o cap a l'esquerra. Això passarà també en qualsevol moviment d'un nombre senar de passos. Els moviments d'un nombre parell de passos deixaran les lletres cap amunt o cap avall, girs de 180° o de 360°, però no apaisades.

Suposem que la posició inicial de les caixes és d'una paritat concreta, per exemple, parell. Observem que en la resposta C)  hem d'haver fet un nombre senar de passos per la caixa A i també un nombre senar per la B. Això és impossible ja que A i B estan en caselles de paritat diferent.
Anàlogament es raona en els casos A) (senar, senar, parell) i B) (parell, parell, parell).
El cas D)  és possible fent una rotació de 90° (sentit horari) de la caixa A sobre el vèrtex superior dret i després una rotació de 180° (sentit antihorari) sobre el nou vèrtex superior dret. La lletra B s'ha de rotar 90° (s.h.) sobre el vèrtex superior esquerre i tot seguit 90° més (s.a.) sobre el nou vèrtex superior esquerre.

---

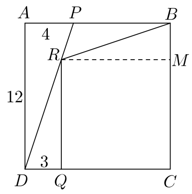
27. A. 20.

Si d és la distància que ens demanen, quan es perd el contacte per ràdio s'ha recorregut $\dfrac{d}{4}$ i el que manca per recòrrer és $\dfrac{3d}{4} = 2^{18} + 2^{19} = 2^{18} \cdot (1+2) = 3 \cdot 2^{18}$ i d'aci es dedueix $d = 4 \cdot 2^{18} = 2^{20}$.

---

28. A. $3\sqrt{10}$.

Els triangles APD i QDR són semblants. Aleshores $\dfrac{RQ}{12} = \dfrac{3}{4}$ d'on $RQ = 9$. Per tant, el triangle rectangle MBR té el catets $MR = 12 - 3 = 9$ i $MB = 12 - 9 = 3$ i la hipotenusa n'és $BR = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.



---

29. C. $\sqrt{14}$.

Si indiquem com a, b, c les longituds de les arestes diferents de l'ortoedre l'àrea total serà $2ab+2ac+2bc = 22$ i la suma de totes les arestes $4(a+b+c) = 24 \Rightarrow a+b+c = 6$. Aleshores $36 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ i per tant $a^2+b^2+c^2 = 36-22 = 14$. Ara bé, si d és la diagonal de l'ortoedre, el teorema de Pitàgores ens permet deduir que $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ i, doncs, $d^2 = 14 \Rightarrow d = \sqrt{14}$.

---

30. B. $y = \dfrac{f(10x + 2011) - 2011}{10}$.

Per comprovació podem veure que l'única de les funcions donades que pot fer la transformació adequada és la B).

Si la indiquem com $F(X) = \dfrac{f(10x + 2011) - 2011}{10}$ en cas que la funció donada compleixi $f(2011) = 2011$ és $F(0) = 0$; si fos $f(2021) = 2021$ trobaríem $f(1) = 1$; si fos $f(2001) = 2001$ en resulta $F(-1) = -1$; etc.

A partir de les idees de transformacions de funcions podem raonar que la transformació és realment la correcta.